

Corrigés — Géométrie dans l'espace

Chapitre 14

Positions relatives

Solution 1.

Dans le cube $ABCDEFGH$:

1. (AB) et (EG) : EG est une diagonale de la face supérieure ; AB une arête de la face inférieure. Ces droites n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles : **non coplanaires**.
2. (AB) et (CD) : arêtes opposées de la face $ABCD$ — coplanaires et **parallèles**.
3. (AH) et (BG) : AH et BG sont les diagonales des faces $AEHD$ et $BFGC$ respectivement (deux faces opposées). Elles sont parallèles.

Solution 2.

Exemples :

1. parallèles : (AB) et (DC) .
2. sécantes : (AB) et (AD) (en A).
3. non coplanaires : (AB) et (EH) .
4. droite parallèle à un plan : (EF) parallèle au plan $(ABCD)$.
5. plans parallèles : $(ABCD)$ et $(EFGH)$.

Parallélisme

Solution 3.

1. $(EFGH) \parallel (ABCD)$: ce sont les faces inférieure et supérieure, deux plans parallèles par construction du cube.
2. $(EF) \subset (EFGH)$ et $(EFGH) \parallel (ABCD)$, donc (EF) est parallèle au plan $(ABCD)$.
3. $(AC) \subset (ABCD)$ et $(EG) \subset (EFGH)$, deux plans parallèles. De plus, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ par translation verticale, donc $(AC) \parallel (EG)$.

Solution 4.

I milieu de $[EF]$ et J milieu de $[HG]$. Le segment $[IJ]$ est parallèle aux côtés $[EH]$ et $[FG]$ du rectangle $EFGH$. Comme $EH \parallel AD$ et $AD \parallel AB$? — non. Reprenons.

Le segment $[IJ]$ joint les milieux des côtés opposés $[EF]$ et $[HG]$, donc est parallèle aux deux autres côtés $[EH]$ et $[FG]$. $[EH]$ est parallèle à $[AD]$ (côtés opposés du cube), pas à $[AB]$.

Vérification de l'énoncé : peut-être que I et J étaient les milieux de $[EH]$ et $[FG]$? Dans ce cas $[IJ] \parallel [EF] \parallel [AB]$. ✓

Orthogonalité

Solution 5.

AE est arête verticale du cube. AB et AD sont les deux arêtes horizontales issues de A , donc dans le plan $(ABCD)$. Comme AE est perpendiculaire à AB (faces du cube se rencontrent à angle droit) et à AD (de même), et que AB et AD sont sécantes en A , par le critère : $(AE) \perp (ABCD)$.

Solution 6.

1. $SA \perp (ABC)$ signifie $SA \perp AB$ et $SA \perp AC$ (et toute autre droite du plan).
2. $AB \perp AC$ et $SA \perp AC$: AC est perpendiculaire aux deux droites sécantes AB et SA du plan (SAB) . Donc $AC \perp (SAB)$, et en particulier $AC \perp SB$, soit $(SB) \perp (AC)$.

Solides usuels — calculs

Solution 7.

1. Cube : $V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$.
2. Parallélépipède : $V = 4 \times 5 \times 6 = 120 \text{ cm}^3$.
3. Pyramide : $V = \left(\frac{1}{3}\right) \times 6^2 \times 9 = 108 \text{ cm}^3$.
4. Cylindre : $V = \pi \times 9 \times 10 = 90\pi \approx 282,7 \text{ cm}^3$.
5. Sphère : $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi \times 125 = \frac{500\pi}{3} \approx 523,6 \text{ cm}^3$.

Solution 8.

Diagonale d'une face : $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Diagonale du cube (par Pythagore dans le triangle rectangle formé par une arête et la diagonale d'une face) : $\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Sections planes

Solution 9.

Section : disque de rayon $r' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$.

Solution 10.

Apothème : $\ell = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

Vecteurs et coordonnées

Solution 11.

1. $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 0 - 2; 2 - (-1)) = (2; -2; 3)$. $\overrightarrow{AC} = (-2 - 1; 4 - 2; 5 - (-1)) = (-3; 2; 6)$.
2. $AB = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$.
3. Milieu de $[BC]$: $(\frac{3-2}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{2+5}{2}) = (\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2})$.

Solution 12.

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = (2 - 6; 4 + 3; 6 - 0) = (-4; 7; 6).$$

Synthèse

Solution 13.

1. Hauteur du triangle équilatéral BCD d'arête a : $h_{BCD} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Le centre de gravité G de BCD est à la distance $GB = (\frac{2}{3})h_{BCD} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ d'un sommet.
Hauteur du tétraèdre depuis A : par Pythagore, $H = \sqrt{a^2 - \left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Solution 14.

$AG = (a; a; a)$ (vecteur de l'origine A au sommet opposé). Représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=at \\ y=at \\ z=at \end{cases}$$
 avec $t \in \mathbb{R}$.