Géométrie dans l'espace

Chapitre 14

Points, droites et plans

L'espace géométrique est constitué de points. Trois points non alignés définissent un *plan* ; deux points distincts définissent une *droite*.

Propriété — Axiomes
1. Par deux points distincts passe une et une seule droite.
2. Par trois points non alignés passe un et un seul plan.
3. Si une droite a deux points en commun avec un plan, elle est entièrement contenue dans ce plan.
4. Si deux plans distincts ont un point commun, ils ont une droite commune (leur *intersection*).

Positions relatives

Deux droites

Deux droites (D_1) et (D_2) de l'espace sont :
- **coplanaires** (dans un même plan) :
  - parallèles (sans point commun ou confondues), ou
  - sécantes (un seul point commun) ;
- **non coplanaires** : aucun plan ne les contient toutes deux ; elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Une droite et un plan

Une droite (D) et un plan (P) sont dans l'une des trois situations :
- $(D) \subset (P)$ (la droite est incluse dans le plan) ;
- (D) et (P) **parallèles** (sans point commun) ;
- (D) et (P) **sécants** en un seul point.

Deux plans

Deux plans (P_1) et (P_2) sont :
- **parallèles** (confondus ou sans point commun) ;
- **sécants** : leur intersection est une droite.

Théorèmes de parallélisme

Théorème — Théorème du toit
Si deux droites parallèles (D_1) et (D_2) sont contenues respectivement dans deux plans sécants (P_1) et (P_2) d'intersection (Δ), alors (Δ) est parallèle à (D_1) (et donc à (D_2)).

Théorème — Transitivité du parallélisme
1. Si $(D_1) \parallel (D_2)$ et $(D_2) \parallel (D_3)$, alors $(D_1) \parallel (D_3)$.
2. Si $(P_1) \parallel (P_2)$ et $(P_2) \parallel (P_3)$, alors $(P_1) \parallel (P_3)$.

Théorème
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Théorème
Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à l'autre.

Orthogonalité

Droite orthogonale à un plan

Définition
Une droite (D) est *orthogonale* au plan (P) si elle est orthogonale à toute droite de (P).

Théorème — Critère pratique
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.

Propriété
1. Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P), alors toute droite parallèle à (D) est aussi orthogonale à (P).
2. Si deux plans sont parallèles et qu'une droite est orthogonale à l'un, elle est orthogonale à l'autre.
3. Par un point, il passe une unique droite orthogonale à un plan donné, et un unique plan orthogonal à une droite donnée.

Solides usuels et leurs sections planes

Cube et parallélépipède rectangle

Un *cube* est un parallélépipède rectangle dont toutes les arêtes ont la même longueur. Pour un cube d'arête a : volume $V = a^3$, aire totale $S = 6a^2$, diagonale principale $d = a\sqrt{3}$.

Pyramide

Volume d'une pyramide de base d'aire B et de hauteur h :

$$V = \left(\frac{1}{3}\right)Bh.$$

Cylindre, cône, sphère

Solide	Volume	Surface latérale
Cylindre r, h	$\pi r^2 h$	$2\pi rh$
Cône r, h	$\left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h$	$\pi r\ell$ ($\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$)
Sphère rayon r	$\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$	$4\pi r^2$

Sections planes

Quand on coupe un solide par un plan, on obtient une *section* :

- Cube ou parallélépipède : section rectangulaire (parallèle à une face) ou triangulaire / hexagonale selon l'inclinaison.
- Cylindre coupé parallèlement à sa base : disque.
- Cylindre coupé parallèlement à l'axe : rectangle.
- Sphère coupée par un plan : disque (cercle de rayon $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ où d est la distance du centre au plan).

Exemple. Une sphère de rayon 5 cm est coupée par un plan situé à 3 cm du centre. Le rayon du disque obtenu est $\sqrt{25 - 9} = 4$ cm.

Vecteurs dans l'espace

Définition
Un *vecteur de l'espace* est défini par sa direction, son sens et sa norme — comme dans le plan. Les opérations (somme, multiplication par un scalaire) suivent les mêmes règles. La relation de Chasles reste vraie.

Vecteurs coplanaires

Définition
Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont *coplanaires* s'ils peuvent être représentés par des bipoints contenus dans un même plan. Équivalemment, il existe deux réels a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (si $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

Base et repère de l'espace

Définition
Une *base* de l'espace est un triplet $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de trois vecteurs non coplanaires. Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

et (x, y, z) sont les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans cette base.

Un *repère* de l'espace est un quadruplet $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Tout point M a alors des coordonnées $M(x; y; z)$.

Distance dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple. $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; -1)$: $AB = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$.

Représentation paramétrique d'une droite

Théorème
Soit (D) la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$. Alors (D) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$