Corrigés — Fonctions numériques

Chapitre 13

Domaine de définition

Solution 1.

1. $f(x) = x^3 - 5x + 2$: $D_f = \mathbb{R}$ (polynôme).
2. g : il faut $x + 4 \neq 0$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
3. h : $2x - 6 \geq 0 \iff x \geq 3$. $D_h = [3, +\infty[$.
4. k : $x \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$. $D_k = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.
5. ℓ : $4 - x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$. $D_\ell =]-2, 2[$.

Parité

Solution 2.

1. $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$. **Paire.**
2. $g(-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -g(x)$. **Impaire.**
3. $h(-x) = x^2 - 2x \neq h(x)$ ni $-h(x)$. **Ni paire ni impaire.**
4. $k(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = k(x)$. **Paire.**
5. $\ell(-x) = |-x\frac{|}{x^2} = |x\frac{|}{x^2} = \ell(x)$. **Paire.**

Solution 3.

Si $x \geq 0$: $f(x) = \frac{x+x}{2} = x \geq 0$. Si $x < 0$: $f(x) = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \geq 0$. Donc $f(x) \geq 0$.

$f(-x) = \frac{-x+|x|}{2}$. Si $x > 0$: $f(-x) = \frac{-x+x}{2} = 0 \neq f(x) = x$. Donc **ni paire, ni impaire**.

Périodicité

Solution 4.

1. $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$. ✓
2. $g(x + 4\pi) = \cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$. ✓
3. $h\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \tan(3x + \pi) = \tan(3x) = h(x)$. ✓

Monotonie et extrema

Solution 5.
Soient $x_1 < x_2$. Alors $-2x_1 > -2x_2$, donc $-2x_1 + 5 > -2x_2 + 5$, soit $f(x_1) > f(x_2)$. $\boldsymbol{f}$ **strictement décroissante.**

Solution 6.
1. $f(x) = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$.
2. Minimum atteint en $x = 2$, valeur -3. Décroissante sur $]-\infty, 2]$, croissante sur $[2, +\infty[$.
3. Tableau : | x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ | | f | décroissant | -3 | croissant |

Solution 7.
Soient $1 \leq x_1 < x_2$. Alors $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est strict. croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$, soit $g(x_1) < g(x_2)$.

Opérations et composition

Solution 8.
1. $(f+g)(x) = 2x + 1 + x^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$.
2. $(fg)(x) = (2x+1)(x^2-3) = 2x^3 - 6x + x^2 - 3$.
3. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5$.
4. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x - 2$.

Solution 9.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \frac{1}{(x+2)-2} = \frac{1}{x}$. Domaine : $g(x) \neq 2$, soit $x + 2 \neq 2$, $x \neq 0$. $D = \mathbb{R}^*$.

Transformations

Solution 10.
1. g : translation verticale de $+3$.
2. h : translation horizontale de $+1$.
3. k : symétrie par rapport à l'axe Ox.
4. ℓ : translation $(-2; -1)$.
5. m : dilatation verticale par 2.

Solution 11.
1. C_f : la courbe en racine carrée habituelle (concave, partant de 0).

2. $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$: translation $(2; 1)$ par rapport à C_f.

Synthèse

Solution 12.

1. $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$. **Impaire.**
2. $f(2) - f(1) = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - (1 + 1) = 0.5$ (donc $\frac{1}{2}$). $f(3) - f(2) = \left(3 + \frac{1}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
3. Différences positives : f semble **croissante** sur $[1, +\infty[$.

Solution 13.

1. $f(-x) = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$. Impaire.
2. Soient $x_1, x_2 \in]0, 1]$ avec $x_1 < x_2$. $f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$. Comme $0 < x_1 x_2 \leq 1$, on a $\frac{1}{x_1 x_2} \geq 1$, donc $1 - \frac{1}{x_1 x_2} \leq 0$. Et $x_2 - x_1 > 0$. Le produit est ≤ 0. Donc $f(x_2) \leq f(x_1)$: f est **décroissante** sur $]0, 1]$.