Les fonctions numériques — généralités

Chapitre 13

Définition d'une fonction numérique

Définition — Fonction numérique d'une variable réelle
Une *fonction numérique* f d'une variable réelle est une règle qui à chaque réel x d'un ensemble $D_f \subseteq \mathbb{R}$ (le *domaine de définition*) associe un unique réel noté $f(x)$ (l'*image* de x). On note $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

Domaine de définition

Le domaine de définition est l'ensemble des réels pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens. Règles à connaître :

- Une fraction $\frac{A(x)}{B(x)}$ exige $B(x) \neq 0$.
- Une racine carrée $\sqrt{A(x)}$ exige $A(x) \geq 0$.
- Composition : si $f(x) = g(h(x))$, il faut $x \in D_h$ et $h(x) \in D_g$.

Exemple. Déterminer les domaines de :
1. $f(x) = x^2 - 3x$: $D_f = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. $h(x) = \sqrt{x-3}$: $D_h = [3, +\infty[$.
4. $k(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$: signe de $\frac{x+2}{x-1}$. Tableau de signes : $D_k =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$.

Représentation graphique

Définition
La *courbe représentative* de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ pour $x \in D_f$.

Parité d'une fonction

Définition — Fonction paire, fonction impaire
Soit f définie sur D_f, avec D_f symétrique par rapport à 0 ($x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$).

- f est *paire* si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

- f est *impaire* si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété — Symétries de la courbe
- Si f est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- Si f est **impaire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine** O.

Exemple.
- $x \mapsto x^2$: paire ($(-x)^2 = x^2$).
- $x \mapsto x^3$: impaire ($(-x)^3 = -x^3$).
- $x \mapsto |x|$: paire.
- $x \mapsto x^2 + x$: ni paire ni impaire ($f(-1) = 0 \neq f(1) = 2$).

Périodicité

Définition
Une fonction f est *périodique* de période $T > 0$ si pour tout $x \in D_f$: $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. La plus petite période strictement positive (si elle existe) s'appelle la *période fondamentale*.

Exemple.
- cos et sin sont 2π-périodiques.
- tan est π-périodique.
- La fonction « partie fractionnaire » est 1-périodique.

Monotonie

Définition — Fonction monotone
Soit f définie sur un intervalle I.
- f est *croissante* sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est *décroissante* sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est *strictement croissante* (resp. décroissante) si l'inégalité est stricte.
- f est *constante* sur I si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in I$.

Tableau de variations

Représentation synthétique : on note $\nearrow$ pour croissante, $\searrow$ pour décroissante. On y indique les valeurs aux bords des intervalles et aux points où la monotonie change.

Exemple. Pour $f(x) = x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Extrema

Définition
Soit f définie sur I et $x_0 \in I$.

- f admet un *maximum* (global) en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$. La valeur $f(x_0)$ s'appelle alors maximum de f sur I.
- De même pour le *minimum*.
- On parle d'*extremum local* si la propriété n'est vraie que sur un voisinage de x_0.

Exemple. $f(x) = x^2 + 1$ admet un minimum global 1 atteint en 0. $g(x) = -x^2 + 4$ admet un maximum global 4 atteint en 0.

Fonctions de référence

Propriété — Tableau récapitulatif

Fonction	Domaine	Variations
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	strict. croissante
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	déc. sur $\mathbb{R}_-$, croiss. sur $\mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	strict. croissante
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	déc. sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	strict. croissante
$x \mapsto \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	déc. sur $\mathbb{R}_-$, croiss. sur $\mathbb{R}_+$

Opérations sur les fonctions

Définition
Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g. Pour $x \in D_f \cap D_g$:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$.
- Composée : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour $x \in D_f$ tel que $f(x) \in D_g$.

Exemple. Soit $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$. Alors :
- $(f + g)(x) = x^2 + x + 1$;
- $(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2$;
- $(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1$.

Noter que $f \circ g \neq g \circ f$ en général.

Transformations de la courbe représentative

Propriété
Soit f une fonction et C_f sa courbe. Pour $a, b, k \in \mathbb{R}$ avec $k > 0$:
1. $g(x) = f(x) + b$: C_g se déduit de C_f par **translation** verticale de vecteur $b\vec{\jmath}$.
2. $g(x) = f(x - a)$: C_g se déduit de C_f par **translation** horizontale de vecteur $a\vec{\imath}$.
3. $g(x) = -f(x)$: C_g est la **symétrique** de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
4. $g(x) = f(-x)$: C_g est la symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées.
5. $g(x) = kf(x)$: C_g est la **dilatation** verticale de C_f par le facteur k.

Exemple. Soit $f(x) = x^2$. La courbe de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ est la translatée de la parabole f par le vecteur $(2; 3)$.