Exercices — Fonctions numériques (généralités)

Chapitre 13

Domaine de définition

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions :
1. $f(x) = x^3 - 5x + 2$;
2. $g(x) = \frac{3x-1}{x+4}$;
3. $h(x) = \sqrt{2x - 6}$;
4. $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;
5. $\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Parité

Exercice 2. Étudier la parité des fonctions suivantes (justifier) :
1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$;
2. $g(x) = 2x^3 - x$;
3. $h(x) = x^2 + 2x$;
4. $k(x) = \frac{\sin x}{x}$, défini sur $\mathbb{R}^*$;
5. $\ell(x) = |x\frac{|}{x^2}$ défini sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ vérifie : $f(x) \geq 0$ pour tout x. Est-elle paire ? impaire ?

Périodicité

Exercice 4. Vérifier la périodicité de :
1. $f(x) = \sin(2x)$: période π ;
2. $g(x) = \cos(\frac{x}{2})$: période 4π ;
3. $h(x) = \tan(3x)$: période $\frac{\pi}{3}$.

Monotonie et extrema

Exercice 5. Soit $f(x) = -2x + 5$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
1. Mettre f sous forme canonique.
2. En déduire le sens de variation de f et son extremum.
3. Dresser le tableau de variations.

Exercice 7. Soit $g(x) = \sqrt{x-1}$ pour $x \geq 1$. Démontrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Indication : utiliser la croissance de $\sqrt{\cdot}$.

Opérations et composition

Exercice 8. Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 3$. Calculer :
1. $(f + g)(x)$;
2. $(fg)(x)$;
3. $(f \circ g)(x)$;
4. $(g \circ f)(x)$.

Exercice 9. Soit $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = x + 2$. Déterminer $f \circ g$ et donner son domaine de définition.

Transformations de courbe

Exercice 10. On considère la courbe C_f de $f(x) = x^2$. Décrire la transformation qui permet de passer à :
1. $g(x) = x^2 + 3$;
2. $h(x) = (x - 1)^2$;
3. $k(x) = -x^2$;
4. $\ell(x) = (x + 2)^2 - 1$;
5. $m(x) = 2x^2$.

Exercice 11. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}_+$.
1. Représenter C_f.
2. Représenter C_g avec $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$. Quelle transformation ?

Synthèse

Exercice 12. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
1. Étudier la parité de f.
2. Calculer $f(2) - f(1)$ et $f(3) - f(2)$.
3. Conjecturer (sans démonstration) un sens de variation pour $x > 1$.

Exercice 13. Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
1. Justifier que f est impaire.
2. Démontrer que pour tous $x_1, x_2 \in]0, 1]$ avec $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation ?