Corrigés — Le produit scalaire dans le plan

Chapitre 12

Calcul de produits scalaires

Solution 1.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$.
2. $5 \times (-2) + (-2) \times (-5) = -10 + 10 = 0$. Orthogonaux.
3. $(-1) \times 3 + 3 \times (-1) = -6$.

Solution 2.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$.

Solution 3.

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = -\frac{12}{4 \times 6} = -\frac{1}{2}$. Donc l'angle vaut $\frac{2\pi}{3}$.

Orthogonalité

Solution 4.

1. $3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$. **Orthogonaux.**
2. $1 \times 4 + 4 \times (-1) = 0$. **Orthogonaux.**
3. $5 \times 2 + 3 \times (-1) = 7 \neq 0$. Non orthogonaux.

Solution 5.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2a + 8a = 10a$. Annule pour $a = 0$ — mais alors $\vec{u} = \vec{0}$ qui est orthogonal à tout vecteur, ou $\vec{v}$ vaut $(0; 8) \neq \vec{0}$. Cas trivial. Pour $a \neq 0$ il n'y a pas d'orthogonalité.

Note : si l'énoncé voulait $\vec{v}(a; 8)$ avec un signe différent, vérifier ; ici la réponse est $a = 0$.

Identités

Solution 6.

Développons : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Sommer : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2$. ✓

Solution 7.
$ABCD$ parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Diagonales : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2$.

Diagonales perpendiculaires ssi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, soit $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$, c'est-à-dire que les côtés adjacents sont égaux : **losange**.

Théorème d'Al-Kashi

Solution 8.
$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos 60° = 100 - 48 = 52$. $BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Solution 9.
Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$, soit $25 = 49 + 36 - 2 \times 7 \times 6 \cos \hat{A} = 85 - 84 \cos \hat{A}$. $\cos \hat{A} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7} \approx 0.714$. $\hat{A} \approx 44°$.

Théorème de la médiane

Solution 10.
1. Médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + B\frac{C^2}{2}$, soit $25 + 25 = 2AI^2 + 18$, donc $AI^2 = 16$, $AI = 4$.
2. Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I (médiane = hauteur dans un triangle isocèle) : $AB^2 = AI^2 + IB^2 = 16 + 9 = 25$, soit $AB = 5$. ✓

Équation d'un cercle

Solution 11.
1. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.
2. $x^2 + y^2 = 5$.
3. Diamètre $[AB]$: $(x - 1)(x - 7) + (y - 2)(y - 4) = 0$. Développer : $x^2 - 8x + 7 + y^2 - 6y + 8 = 0$, ou $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.

Solution 12.
1. $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$, soit $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.
2. Centre Ω de coordonnées $(2; -3)$ et rayon 4.

Synthèse

Solution 13.

1. $\overrightarrow{AB} = (4; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 4)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 8 = 0$.
2. $\cos \hat{A} = \frac{0}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = 0$. Donc $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$: **triangle rectangle en $\boldsymbol{A}$**.
3. $AB^2 = 20$, $AC^2 = 20$, $BC^2 = (3-5)^2 + (6-0)^2 = 4 + 36 = 40$. Al-Kashi : $40 = 20 + 20 - 2\sqrt{20}\sqrt{20}\cos \hat{A}$, soit $40 = 40 - 40\cos \hat{A}$, donc $\cos \hat{A} = 0$. ✓

Solution 14.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$, c'est-à-dire que M « voit » le segment $[AB]$ sous un angle droit. Le lieu est donc le **cercle de diamètre $[\boldsymbol{AB}]$** (théorème de l'angle inscrit).