Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Le produit scalaire dans le plan

Chapitre 12

Définitions du produit scalaire

Définition — Définition par la norme et le cosinus
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème — Définition par les coordonnées (repère orthonormé)
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration. C'est l'expression de $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ par développement en coordonnées (admis ici en TC). ■

Théorème — Définition par la projection orthogonale
Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}'$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \varepsilon\, \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}\|$$

où $\varepsilon = +1$ si $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ ont même sens, -1 sinon.

Propriétés algébriques

Propriété — Propriétés fondamentales
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

1. **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. **Bilinéarité** : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$, et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
3. Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (noté $\vec{u}^2$).

Identités de polarisation

Théorème
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:
1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
4. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Orthogonalité

Définition
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, noté $\vec{u} \perp \vec{v}$, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-3;2)$ sont orthogonaux : $2\times(-3)+3\times 2 = 0$.

Théorème — Caractérisation par les coordonnées
Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$xx' + yy' = 0.$$

Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus)

Théorème — Théorème d'Al-Kashi
Dans tout triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\hat{A}\right).$$

Démonstration. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Donc : $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\left(\hat{A}\right) + AB^2$. ■

Exemple. Dans un triangle, $AB = 5$, $AC = 7$, $\hat{A} = 60°$. Calculer BC. $BC^2 = 25 + 49 - 2\times 5\times 7\times\cos 60° = 74 - 35 = 39$. Donc $BC = \sqrt{39}$.

Théorème de la médiane

Théorème — Théorème de la médiane
Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Démonstration. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$. Élevons au carré : $AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = 4AI^2$. () **D'autre part, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2$, soit $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$. () En substituant () dans ()** : $2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 4AI^2$, d'où le résultat. ■

Équation cartésienne d'un cercle

Théorème — Cercle de centre $Omega$ et de rayon r
Dans un repère orthonormé, le cercle de centre Ω de coordonnées $(a; b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Démonstration. $M(x; y)$ appartient au cercle ssi $\Omega M = r$, soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. ■

Théorème — Cercle défini par un diamètre
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, soit :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Démonstration. M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ ssi l'angle $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$ (théorème de l'angle inscrit dans le demi-cercle), ce qui équivaut à $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$. ■

Exemple. Équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$: $(x - 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 4) = 0$. En développant : $x^2 - 6x + 5 + y^2 - 6y + 8 = 0$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$. On peut vérifier que c'est le cercle de centre $(3; 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$ (forme canonique : $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$).