Exercices — Le produit scalaire dans le plan

Chapitre 12

Calcul de produits scalaires

Exercice 1. En repère orthonormé, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour :
1. $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(3;4)$;
2. $\vec{u}(5;-2)$ et $\vec{v}(-2;-5)$;
3. $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(3;-1)$.

Exercice 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et l'angle entre eux vaut $\frac{\pi}{3}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$. Calculer le cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Orthogonalité

Exercice 4. Vérifier l'orthogonalité dans un repère orthonormé :
1. $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(2;3)$;
2. $\vec{u}(1;4)$ et $\vec{v}(4;-1)$;
3. $\vec{u}(5;3)$ et $\vec{v}(2;-1)$.

Exercice 5. Pour quelle(s) valeur(s) de a les vecteurs $\vec{u}(2;a)$ et $\vec{v}(a;8)$ sont-ils orthogonaux ?

Identités et calcul vectoriel

Exercice 6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer :
1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\big)$ (identité du parallélogramme).

Exercice 7. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer en utilisant le produit scalaire que $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.

Théorème d'Al-Kashi

Exercice 8. Calculer BC dans le triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60°$.

Exercice 9. Dans un triangle, $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 6$. Calculer $\cos\left(\hat{A}\right)$ et en déduire la mesure de $\hat{A}$ au degré près.

Théorème de la médiane

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A avec $AB = AC = 5$ et $BC = 6$. Soit I le milieu de $[BC]$.
1. Calculer AI en utilisant le théorème de la médiane.
2. Vérifier ce résultat par le théorème de Pythagore.

Équation d'un cercle

Exercice 11. Donner l'équation du cercle :
1. de centre Ω le point $(2; -3)$ et de rayon 4 ;
2. de centre $O(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$;
3. de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(7; 4)$.

Exercice 12. Soit l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
1. Mettre sous forme canonique $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
2. En déduire le centre et le rayon du cercle.

Synthèse

Exercice 13. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2)$, $B(5; 0)$, $C(3; 6)$.
1. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire le cosinus de l'angle $\hat{A}$.
3. Calculer AB^2, AC^2, BC^2. Vérifier le théorème d'Al-Kashi.

Exercice 14. Soit $A(2; 1)$, $B(6; 3)$. Trouver le lieu des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Réponse attendue : c'est le cercle de diamètre $[AB]$.