

# Corrigés — Équations trigonométriques

## Chapitre 11

### Équations de base

---

#### Solution 1.

1.  $\cos x = -\frac{1}{2} : \alpha = \frac{2\pi}{3}. S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}.$
2.  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} : \alpha = \frac{\pi}{4}. S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}.$
3.  $\sin x = -1 : S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}.$
4.  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} : \alpha = \frac{\pi}{3}. S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}.$
5.  $\tan x = -1 : \alpha = -\frac{\pi}{4}. S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}.$
6.  $\tan x = \sqrt{3} : \alpha = \frac{\pi}{3}. S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}.$

( $k \in \mathbb{Z}$  pour toutes ces solutions.)

#### Solution 2.

Sur  $[0, 2\pi]$  :

1.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \alpha = \frac{5\pi}{6}. S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}.$
2.  $\sin x = \frac{1}{2} : \alpha = \frac{\pi}{6}. S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$
3.  $\tan x = -\sqrt{3} : \alpha = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}. S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$

### Équations $\cos u = \cos v$

---

#### Solution 3.

1.  $\cos(2x) = \cos x$  : soit  $2x = x + 2k\pi, x = 2k\pi$  ; soit  $2x = -x + 2k\pi, 3x = 2k\pi, x = \frac{2k\pi}{3}. S = \{2k\pi\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{3} \right\}$  (le premier est inclus dans le second pour  $k$  multiple de 3).
2.  $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) : 3x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  donne  $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$  ; ou  $3x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} - x + 2k\pi$ , soit  $4x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}.$
3.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$  Donc  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$   
Ou  $x + \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$ , soit  $\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$  non entier : impossible.  
Donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}.$
4.  $\tan(2x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) : 2x = x + \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

## Équations par changement de variable

### Solution 4.

1.  $X = \cos x$ .  $2X^2 - 3X + 1 = 0$ ,  $\Delta = 1$ ,  $X = 1$  ou  $X = \frac{1}{2}$ .  $\cos x = 1 \implies x = 2k\pi$ .  $\cos x = \frac{1}{2} \implies x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .
2.  $X = \sin x$ .  $X^2 - 4X + 3 = 0$ ,  $X = 1$  ou  $X = 3$ .  $\sin x = 1$  donne  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ;  $\sin x = 3$  impossible.
3.  $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 0$  donne  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ , soit  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Donc  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ .

### Solution 5.

1.  $\sin x \cos x = 0$  :  $\sin x = 0$  ou  $\cos x = 0$ . Donc  $x = k\frac{\pi}{2}$ .
2.  $\sin(2x) = \sin x$  :  $2\sin x \cos x = \sin x$ , soit  $\sin x(2\cos x - 1) = 0$ .  $\sin x = 0$  ( $x = k\pi$ ) ou  $\cos x = \frac{1}{2}$  ( $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ).
3.  $\cos x + \cos x \sin x = \cos x(1 + \sin x) = 0$ . Soit  $\cos x = 0$  ( $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ), soit  $\sin x = -1$  ( $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , inclus dans le précédent).

## Inéquations sur le cercle

### Solution 6.

Sur  $[0, 2\pi]$  :

1.  $\cos x \leq \frac{1}{2}$  : sur le cercle, abscisse  $\leq \frac{1}{2}$  correspond aux  $x$  en dehors de l'arc  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ .  $S = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ .
2.  $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  : ordonnée  $\geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $S = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ .
3.  $\tan x \leq 1$  : sur les intervalles où  $\tan$  est définie. Sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  :  $x \leq \frac{\pi}{4}$  ; sur  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  :  $\tan$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$  en passant par 0 en  $x = \pi$ , 1 en  $x = \frac{5\pi}{4}$ . Donc  $S = [0, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}] \cup ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .
4.  $\cos x > 0$  :  $S = [0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .

### Solution 7.

Sur  $[-\pi, \pi]$  :

1.  $\sin x \geq -\frac{1}{2}$  : ordonnée  $\geq -\frac{1}{2}$ .  $\sin = -\frac{1}{2}$  pour  $x = -\frac{5\pi}{6}$  et  $x = -\frac{\pi}{6}$ . Donc  $S = [-\pi, -\frac{5\pi}{6}] \cup [-\frac{\pi}{6}, \pi]$ .
2.  $\cos x < -\frac{1}{2}$  : abscisse  $< -\frac{1}{2}$ .  $\cos = -\frac{1}{2}$  pour  $x = \pm \frac{2\pi}{3}$ .  $S = ]-\pi, -\frac{2\pi}{3}[ \cup ]\frac{2\pi}{3}, \pi]$ . (Vérifier les bornes.)

## Forme $a \cos x + b \sin x$

### Solution 8.

1.  $\cos x + \sin x$  :  $R = \sqrt{2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Donc  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ .
2.  $\sqrt{3} \cos x - \sin x$  :  $R = 2$ ,  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ . Donc  $= 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})$ .

3.  $-\cos x + \sqrt{3} \sin x : R = 2, \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \varphi = \frac{2\pi}{3}$ . Donc  $= 2 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ .

**Solution 9.**

1.  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ , soit  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donc  $x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ . Donc  $x = 0 + 2k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
2.  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ , soit  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ . Donc  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = 2k\pi$ .

## Synthèse

**Solution 10.**

$\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x(1 + 2 \cos x) = 0$ .  $\sin x = 0$  donne  $x = k\pi$ .  $\cos x = -\frac{1}{2}$  donne  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .

**Solution 11.**

1.  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$ .
2.  $2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 0$  équivaut à  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ .
3.  $X = \cos x$ .  $2X^2 + X - 1 = 0$ ,  $\Delta = 1 + 8 = 9$ ,  $X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$  ou  $X = -1$ .  $\cos x = \frac{1}{2} \implies x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .  $\cos x = -1 \implies x = \pi + 2k\pi$ .