Équations et inéquations trigonométriques

Chapitre 11

Équation $\cos x = a$

Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}$.
1. Si $|a| > 1$, l'équation $\cos x = a$ n'a aucune solution.
2. Si $|a| \leq 1$, il existe un unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$, et l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Géométriquement : sur le cercle trigonométrique, deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple. Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$). Solutions : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Équation $\sin x = a$

Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}$.
1. Si $|a| > 1$, aucune solution.
2. Si $|a| \leq 1$, il existe un unique $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \alpha = a$, et :

$$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Géométriquement : deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Solutions : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Équation $\tan x = a$

Théorème
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan \alpha = a$, et :

$$S = \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

La période est π (et non 2π) car la tangente est π-périodique.

Exemple. Résoudre $\tan x = 1$. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Solutions : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Équations dérivées

$\cos u = \cos v$ et $\sin u = \sin v$

Théorème
1. $\cos u = \cos v \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = -v + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
2. $\sin u = \sin v \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = \pi - v + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
3. $\tan u = \tan v \iff u = v + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ u, v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$.

Exemple. Résoudre $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- Soit $2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- Soit $2x = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$, soit $3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$.

Solutions : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Équations par factorisation

Exemple. Résoudre $\cos x \times \sin x = 0$. $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0$ donc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = k\pi$, ce qui se résume à $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple. Résoudre $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Posons $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$, $\Delta = 9$, $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$.
- $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- $\sin x = -\frac{1}{2}$: $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, donc $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Inéquations trigonométriques

La méthode est graphique : on lit sur le cercle trigonométrique les arcs où la condition est satisfaite.

Exemple. Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

L'égalité $\cos x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$. Sur le cercle, les points d'abscisse $\geq \frac{1}{2}$ correspondent aux arcs proches de $A(1;0)$. Sur $[0, 2\pi]$:

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Exemple. Résoudre $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$. Les ordonnées inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur le cercle correspondent à :

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Linéarité auxiliaire $a \cos x + b \sin x$

Théorème
Pour tous a, b non tous deux nuls, il existe $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et un réel φ (uniques modulo 2π) tels que :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi).$$

Le réel φ est défini par $\cos \varphi = \frac{a}{R}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{R}$.

Exemple. Réécrire $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ sous forme $R \cos(x - \varphi)$. $R = \sqrt{1 + 3} = 2$. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Donc $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\big(x - \frac{\pi}{3}\big)$.

Application : résoudre $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$. Cela équivaut à $2 \cos\big(x - \frac{\pi}{3}\big) = 1$, soit $\cos\big(x - \frac{\pi}{3}\big) = \frac{1}{2}$. D'où $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Solutions : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.