Exercices — Équations et inéquations trigonométriques

Chapitre 11

Équations de base

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
1. $\cos x = -\frac{1}{2}$;
2. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\sin x = -1$;
4. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. $\tan x = -1$;
6. $\tan x = \sqrt{3}$.

Exercice 2. Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:
1. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\sin x = \frac{1}{2}$;
3. $\tan x = -\sqrt{3}$.

Équations $\cos u = \cos v$, $\sin u = \sin v$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
1. $\cos(2x) = \cos(x)$;
2. $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)$ (penser à $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$) ;
4. $\tan(2x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Équations par changement de variable

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;
2. $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$;
3. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et exploiter pour résoudre $2\cos^2 x = 1$.

Exercice 5. Résoudre par factorisation :
1. $\sin x \cos x = 0$;

2. $\sin(2x) = \sin x$ (utiliser $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$) ;
3. $\cos x + \cos x \sin x = 0$.

Inéquations sur le cercle trigonométrique

Exercice 6. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ et représenter sur le cercle :
1. $\cos x \leq \frac{1}{2}$;
2. $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\tan x \leq 1$;
4. $\cos x > 0$.

Exercice 7. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
1. $\sin x \geq -\frac{1}{2}$;
2. $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Forme $a\cos x + b\sin x$

Exercice 8. Mettre sous la forme $R\cos(x - \varphi)$:
1. $\cos x + \sin x$;
2. $\sqrt{3}\cos x - \sin x$;
3. $-\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Exercice 9. En utilisant la forme auxiliaire, résoudre :
1. $\cos x + \sin x = 1$;
2. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$.

Synthèse

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) + \sin(2x) = 0$.

Indication : utiliser $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ pour factoriser.

Exercice 11. Soit l'équation $\cos(2x) + \cos(x) = 0$.
1. Démontrer que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
2. En déduire que l'équation équivaut à $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.
3. Résoudre cette équation du second degré en $X = \cos x$, puis dans $\mathbb{R}$.