

# Exercices type contrôle — Équations et inéquations trigonométriques

## Chapitre 11

### Équations élémentaires

---

**Exercice 1.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $] -\pi, \pi]$ , chacune des équations :

1.  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$  ;
2.  $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$  ;
3.  $\tan x = -\sqrt{3}$ .

#### Solution 1.

1.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ , donc  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Dans  $] -\pi, \pi]$  :  $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ .
2.  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , donc  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ . Dans  $] -\pi, \pi]$  :  $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ .
3.  $\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ , donc  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Dans  $] -\pi, \pi]$  :  $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ .

### Équation du type $\cos u = \cos v$

---

**Exercice 2.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ , puis placer les solutions appartenant à  $[0, 2\pi[$  sur le cercle trigonométrique.

#### Solution 2.

$\cos u = \cos v$  équivaut à  $u = v + 2k\pi$  ou  $u = -v + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

- Premier cas :  $2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
- Second cas :  $2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , soit  $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , donc  $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ .

Solutions dans  $[0, 2\pi[$  :  $\frac{\pi}{2}$  (premier cas) et, pour  $k = 0, 1, 2$  :  $\frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}$  (second cas). Soit quatre points sur le cercle.

### Équation du type $\sin u = \sin v$

---

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

**Solution 3.**

$\sin u = \sin v$  équivaut à  $u = v + 2k\pi$  ou  $u = \pi - v + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

- $3x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  donne  $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .
- $3x = \pi - x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  donne  $4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ .

La première famille est contenue dans la seconde (prendre  $k$  pair), donc  $S = \{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$ .

## Équation se ramenant au second degré

**Exercice 4.** Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ .

**Solution 4.**

On pose  $X = \sin x$  :  $2X^2 - 3X + 1 = 0$ ,  $\Delta = 9 - 8 = 1$ , donc  $X = 1$  ou  $X = \frac{1}{2}$ .

- $\sin x = 1$  donne  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- $\sin x = \frac{1}{2}$  donne  $x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

$$S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}.$$

## Inéquations trigonométriques

**Exercice 5.** Résoudre dans  $] -\pi, \pi]$  :

1.  $2\cos x - 1 \geq 0$  ;
2.  $2\sin x + \sqrt{3} < 0$ .

**Solution 5.**

1.  $2\cos x - 1 \geq 0$  équivaut à  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ . Sur le cercle, les points d'abscisse au moins  $\frac{1}{2}$  correspondent aux angles entre  $-\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{3}$  :  $S = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ .
2.  $2\sin x + \sqrt{3} < 0$  équivaut à  $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Les points d'ordonnée strictement inférieure à  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  correspondent aux angles strictement compris entre  $-\frac{2\pi}{3}$  et  $-\frac{\pi}{3}$  :  $S = ]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ .

## Équation $a \cos x + b \sin x = c$

**Exercice 6.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$ .

**Solution 6.**

On factorise par  $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  :  $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

L'équation devient  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , donc  $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , soit  $x = 2k\pi$  ou  $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Vérification : pour  $x = 0$ ,  $1 - 0 = 1$  ; pour  $x = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ .