Corrigés — Transformations dans le plan

Chapitre 10

Translation

Solution 1.
$t_{\vec{u}}(M) = (1+3; 4+(-2)) = (4; 2)$. Antécédent de $N(0;0)$: M tel que $M + \vec{u} = N$, soit $M = N - \vec{u} = (-3; 2)$.

Solution 2.
$\overrightarrow{AB} = (-3; 4)$. $t_{\overrightarrow{AB}}(M(x;y)) = M'(x-3; y+4)$. Image de $C(4;-3)$: $C'(1;1)$.

Symétrie centrale

Solution 3.
$s_{\Omega(M(x;y))} = (2-x; -4-y)$. Image de $M(3;4)$: $(2-3; -4-4) = (-1; -8)$.

Solution 4.
Ω est le milieu de $[AA']$: $\Omega = \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) = (-1; 2)$.

Symétrie axiale

Solution 5.
1. Symétrie d'axe Ox : $(x; y) \mapsto (x; -y)$.
2. Symétrie d'axe Oy : $(x; y) \mapsto (-x; y)$.
3. Symétrie d'axe $y = x$: $(x; y) \mapsto (y; x)$ (échange des coordonnées).

Solution 6.
- Image par symétrie d'axe $y = x$: $(2; 3)$.
- Image par symétrie d'axe $y = -x$: $(x; y) \mapsto (-y; -x)$, donc $A(3; 2) \mapsto (-2; -3)$.

Rotation

Solution 7.
Dans un triangle équilatéral ABC de centre G, la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ permute cycliquement les sommets. Donc l'image de A est B (ou C selon le sens) — dans le sens trigonométrique direct usuel : $A \mapsto B$.

Solution 8.
1. Rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $(1; 0) \mapsto (0; 1)$.
2. $(0; 1) \mapsto (-1; 0)$.
3. Conjecture : $r(x; y) = (-y; x)$.

Vérification : $r(2; 3) = (-3; 2)$ — on tourne de 90° dans le sens trigonométrique.

Homothétie

Solution 9.
$h_{O,2}(A(3; -1)) = (6; -2)$.

Solution 10.
$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$: $(8; 9) = k(2; 3)$, donc $k = 4$ et $9 = 4 \times 3$... non, $4 \times 3 = 12 \neq 9$. Vérifions : $\frac{8}{2} = 4$ et $\frac{9}{3} = 3$. Les rapports sont différents — donc A' ne peut pas être l'image de A par une homothétie de centre O avec un rapport unique.

Réviser l'énoncé : il faudrait que les rapports soient égaux. Si l'énoncé est tel quel, **aucun k ne convient**. (Probablement une erreur d'énoncé, mais l'élève doit savoir vérifier l'égalité des rapports.)

Solution 11.
1. Aire multipliée par $k^2 = 4$: $A'B'C'$ a pour aire 48 cm^2.
2. Longueur multipliée par $|k| = 2$: $A'B' = 6$ cm.

Composition

Solution 12.
$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$. $\vec{u} + \vec{v} = (1 - 3; 2 + 1) = (-2; 3)$. Translation de vecteur $(-2; 3)$.

Solution 13.
Théorème : la composée de deux symétries centrales est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$. $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = (2; -1)$, donc translation de vecteur $(4; -2)$.

Synthèse

Solution 14.
1. Translation : tracer A', B', C' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}$, etc. Le triangle $A'B'C'$ est translaté du triangle initial.
2. Homothétie de centre A rapport $-\frac{1}{2}$: A est invariant ; B' = point tel que $\overrightarrow{AB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (sens opposé, moitié de la longueur) ; idem pour C'.

Solution 15.
1. $h(M(x; y)) = (1 + (-2)(x - 1); 2 + (-2)(y - 2)) = (3 - 2x; 6 - 2y)$.
2. $h(A(3; 5)) = (3 - 6; 6 - 10) = (-3; -4)$.
3. L'image d'une droite est une droite parallèle. Image de $y = x$: c'est une droite parallèle à $y = x$ (donc de pente 1). Pour la déterminer, prendre l'image d'un point : $h(0; 0) = (3; 6)$. Donc l'image est $y = x + 3$.