# Transformations usuelles dans le plan

Chapitre 10

## Translation

**Définition — Translation de vecteur $arrow(u)$**
Soit $\vec{u}$ un vecteur. La *translation* de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application qui à tout point $M$ associe l'unique point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

**Propriété — Propriétés**

1. La translation conserve les distances : $M'N' = MN$.
2. Elle conserve l'alignement, le parallélisme, les angles, et les milieux.
3. Image d'une droite : une droite parallèle à la première.
4. Image d'un cercle : un cercle de même rayon.

**Théorème — Expression analytique**
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $\vec{u}(a; b)$. La translation $t_{\vec{u}}$ envoie $M(x; y)$ sur $M'(x'; y')$ avec :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

## Symétrie centrale

**Définition — Symétrie de centre $Omega$**
Soit $\Omega$ un point du plan. La *symétrie centrale* de centre $\Omega$, notée $s_\Omega$, associe à tout point $M$ l'unique point $M' = s_{\Omega(M)}$ tel que $\Omega$ soit le milieu de $[MM']$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}.$$

**Propriété**
La symétrie centrale conserve les distances et inverse l'orientation des angles. C'est l'**homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-1$** (voir section 5).

**Théorème — Expression analytique**
Soit $\Omega$ de coordonnées $(a;b)$. Alors $s_\Omega$ envoie $M(x;y)$ sur $M'(x';y')$ avec :

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}$$

# Symétrie axiale

**Définition — Symétrie d'axe $(D)$**
Soit $(D)$ une droite. La *symétrie axiale* d'axe $(D)$, notée $s_D$, associe à tout point $M$ l'unique point $M' = s_D(M)$ tel que $(D)$ soit la médiatrice du segment $[MM']$ (et $M' = M$ si $M \in (D)$).

**Propriété**
La symétrie axiale conserve les distances. Elle change l'orientation des angles (c'est une *isométrie indirecte*).

**Exemple.** Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $s(x;y) = (x;-y)$. Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $s(x;y) = (-x;y)$.

# Rotation

**Définition — Rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$**
Soit $\Omega$ un point et $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure d'angle (en rad). La *rotation* de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$, notée $r_{\Omega,\theta}$, associe à tout point $M$ l'unique point $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$ tel que :
- $\Omega M' = \Omega M$ (même distance au centre) ;
- l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

Et $r_{\Omega,\theta}(\Omega) = \Omega$.

**Propriété**
1. La rotation conserve les distances (isométrie).
2. Conserve les angles, l'alignement, le parallélisme, les cercles.
3. Cas particuliers : $r_{\Omega,0} = \mathrm{id}$ ; $r_{\Omega,\pi}$ est la symétrie centrale de centre $\Omega$.

# Homothétie

**Définition — Homothétie de centre $Omega$ et de rapport $k$**
Soit $\Omega$ un point et $k \in \mathbb{R}^*$. L'*homothétie* de centre $\Omega$ et de rapport $k$, notée $h_{\Omega,k}$, associe à tout point $M$ l'unique point $M' = h_{\Omega,k}(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

**Propriété — Propriétés fondamentales de l'homothétie**
Soit $h = h_{\Omega,k}$ et $M', N'$ les images de $M, N$.
1. $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ : la longueur est multipliée par $|k|$.
2. L'image d'une droite est une droite parallèle.
3. L'image d'un cercle de rayon $r$ est un cercle de rayon $|k|\ r$.
4. Les angles sont conservés.
5. Les aires sont multipliées par $k^2$.
6. Cas particuliers : $k = 1$ donne l'identité ; $k = -1$ donne la symétrie centrale de centre $\Omega$.

**Théorème — Expression analytique**
Soit $\Omega$ de coordonnées $(x_\Omega; y_\Omega)$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Alors $h_{\Omega,k}$ envoie $M(x;y)$ sur $M'(x';y')$ avec :

$$\begin{cases} x' = x_\Omega + k(x - x_\Omega) \\ y' = y_\Omega + k(y - y_\Omega). \end{cases}$$

**Exemple.** Soit $\Omega$ le point $(2;1)$ et $k = 3$. Image de $M(4;-1)$ par $h_{\Omega,3}$ : $x' = 2 + 3(4-2) = 8$ ; $y' = 1 + 3(-1-1) = -5$. Donc $M'(8;-5)$.

# Composition de transformations

## Composition de deux translations

**Théorème**
La composée de deux translations est une translation : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

*Démonstration.* Soit $M$ et $M_1 = t_{\vec{u}}(M)$, donc $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$. Soit $M_2 = t_{\vec{v}}(M_1)$, donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$. Alors $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} + \vec{v}$, donc $M_2 = t_{\vec{u}+\vec{v}}(M)$. ∎

## Composition de deux symétries centrales

**Théorème**
Soient $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux points distincts. La composée $s_{\Omega_2} \circ s_{\Omega_1}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

## Composition d'homothéties de même centre

**Théorème**

$h_{\Omega,k'} \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega,kk'}$.