

Bases de la trigonométrie

Chapitre 9

Le cercle trigonométrique et le radian

Définition — Cercle trigonométrique

Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Il est orienté positivement dans le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Définition — Le radian

Le *radian* est l'unité d'angle telle qu'un angle de 1 rad correspond à un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique. Comme la circonférence vaut 2π , on a la correspondance fondamentale :

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad \text{donc} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}^\circ.$$

Exemple. Conversion :

- $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$;
- $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$;
- $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$;
- $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$;
- $180^\circ = \pi \text{ rad}$;
- $-\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = -120^\circ$.

Cosinus, sinus, tangente d'un réel

Définition — cos, sin, tan d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point M du cercle trigonométrique associé à l'arc orienté de mesure x rad à partir du point $A(1;0)$. Les coordonnées de M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) sont :

$$M(\cos x; \sin x).$$

La *tangente* de x , notée $\tan x$, est définie pour $\cos x \neq 0$ par :

$$\tan x = \sin \frac{x}{\cos}.$$

Propriété — Propriétés immédiates

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
2. $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (**périodicité 2π**).
3. $\tan x = \tan(x + k\pi)$ (**périodicité π**).

Relation fondamentale**Théorème — Identité fondamentale**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration. Le point $M(\cos x; \sin x)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1, donc $OM = 1$, c'est-à-dire $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. ■

Propriété

Si $\cos x \neq 0$:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Démonstration. En divisant l'identité fondamentale par $\cos^2 x$: $1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, soit $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■

Signes selon le quadrant

Le cercle trigonométrique est divisé en quatre quadrants par les axes :

- 1er quadrant ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) : $\cos > 0$, $\sin > 0$, $\tan > 0$.
- 2e quadrant ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$) : $\cos < 0$, $\sin > 0$, $\tan < 0$.
- 3e quadrant ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$) : $\cos < 0$, $\sin < 0$, $\tan > 0$.
- 4e quadrant ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$) : $\cos > 0$, $\sin < 0$, $\tan < 0$.

Valeurs remarquables**Théorème — Tableau des valeurs remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non def.

Exemple. Calculer $A = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $A = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$.

Formules de réduction

Ces formules permettent de ramener $\cos / \sin / \tan$ d'un angle quelconque à un angle de $[0, \frac{\pi}{2}]$. Elles découlent des symétries du cercle trigonométrique.

Théorème — Angles opposés et supplémentaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ et $\tan(-x) = -\tan x$ (parité).
2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ (supplémentaires).
3. $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Théorème — Angles complémentaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Exemple. Calcul de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$: $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$: par parité, $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$. Et $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Application : équations simples par lecture sur le cercle

L'étude approfondie des équations $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$ est faite au Chapitre 11. Mentionnons la lecture directe sur le cercle :

Exemple. Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$. Sur le cercle, les points dont l'abscisse vaut $\frac{1}{2}$ sont obtenus pour $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Donc sur $[0, 2\pi]$, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Exemple. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$. Les points d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont obtenus pour $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Donc $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.