Corrigés — La droite dans le plan

Chapitre 8

Repère et distances

Solution 1.

1. $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = 5$. $AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. $BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$.
2. $AB^2 = 25$, $AC^2 = 34$, $BC^2 = 37$. Vérifier Pythagore : $AB^2 + AC^2 = 59 \neq BC^2$. Non rectangle. Triangle quelconque.

Solution 2.

$AB = 4$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{16+9} = 5$. Périmètre $= 12$. $AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2$, donc rectangle en A.

Équations de droites

Solution 3.

1. Direction $\vec{u}(3;-1)$ $\to$ équation cartésienne : $(x-1)(-1) - (y-2)(3) = 0$, soit $-x+1-3y+6=0$, ou $x+3y=7$.
2. $\overrightarrow{AB}(-2;-1)$. Équation : $-1(x-0) + 2(y-4) = 0$, soit $-x+2y=8$, ou $x-2y+8=0$.
3. Parallèle à $y = 2x-5$: pente $m=2$. Équation : $y = 2x+p$ et $-1 = 2+p$, $p=-3$. Donc $y = 2x-3$.

Solution 4.

1. $3x - 2y + 6 = 0 \iff y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$.
2. $4y - 8 = 0 \iff y = 2$ (horizontale).
3. $5x + 10 = 0 \iff x = -2$ (verticale, pas de forme réduite).
4. $-2x + y - 7 = 0 \iff y = 2x + 7$.

Solution 5.

1. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
2. $\overrightarrow{AB}(2;4)$ direction. $\begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Parallélisme et perpendicularité

Solution 6.

1. $(D_1) : y = 3x + 1$ pente 3. $(D_2) : 6x - 2y + 5 = 0 \iff y = 3x + \frac{5}{2}$ pente 3. **Parallèles**.
2. $(D_3) : y = -\left(\frac{1}{2}\right)x + 4$ pente $-\frac{1}{2}$. $(D_4) : y = -2x + 1$ pente -2. Produit 1, donc ni parallèles ni perpendiculaires.
3. $(D_5) : y = 4x + 1$ pente 4. $(D_6) : y = -\left(\frac{1}{4}\right)x + 2$ pente $-\frac{1}{4}$. Produit -1. **Perpendiculaires**.

Solution 7.

$(D) : 2x - 3y + 1 = 0 \rightarrow$ vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.

1. (D') parallèle, passant par $A(1; 4)$: équation $2x - 3y + c = 0$ avec $2 - 12 + c = 0$, $c = 10$. Donc $2x - 3y + 10 = 0$.
2. Perpendiculaire en repère orthonormé : direction normale est $\vec{u}(3; 2)$. Donc $(D'') : 3x + 2y + c = 0$ avec $-6 + 10 + c = 0$, $c = -4$. Donc $3x + 2y - 4 = 0$.

Intersection

Solution 8.

1. $2x - 3 = -x + 6 \implies 3x = 9 \implies x = 3$, puis $y = 3$. Intersection $(3; 3)$.
2. Du système : $L_2 + L_1 \times 2$: $7x - 5 = 0$ après simplifications. Détaillons : $L_1 : 3x + y = 5$, $L_2 : x - 2y = -3$. $2L_1 + L_2 : 7x = 7$, $x = 1$, $y = 2$. Intersection $(1; 2)$.

Solution 9.

Parallèles ssi pentes égales : $m = 3m - 1$, soit $m = \frac{1}{2}$.

Distance d'un point à une droite

Solution 10.

1. $d = |3 \times 2 + 4 \times (-1) - 5\frac{|}{\sqrt{9+16}} = |-3\frac{|}{5} = \frac{3}{5}$.
2. $d = |0 + 0 - 3\frac{|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
3. $y = x + 4 \iff x - y + 4 = 0$. $d = |1 - 2 + 4\frac{|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Synthèse

Solution 11.

$A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(3; 5)$.

1. $AB = 4$; $BC = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$; $AC = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Triangle isocèle en C.
2. Médiatrice de $[AB]$: milieu $(3;1)$, perpendiculaire à AB horizontale $\rightarrow$ médiatrice verticale $x = 3$.
3. Hauteur issue de C : perpendiculaire à (AB) (horizontale) passant par $C(3;5)$: $x = 3$. (C'est la même ! — naturel car triangle isocèle.)

Solution 12.

$(D) : y = -2x + 4$.

1. Intersection axe des x : $y = 0$, $x = 2 \rightarrow (2;0)$. Intersection axe des y : $x = 0$, $y = 4 \rightarrow (0;4)$.
2. Triangle rectangle de côtés 2 et 4. Aire $= \left(\frac{1}{2}\right) \times 2 \times 4 = 4$.

Solution 13.

1. $\overrightarrow{AB}(4;2)$. Équation cartésienne : $2(x-(-2)) - 4(y-1) = 0$, soit $2x - 4y + 8 = 0$, ou $x - 2y + 4 = 0$.
2. $d(C,(AB)) = |4 - 2 \times (-1) + 4\frac{|}{\sqrt{1+4}} = |10\frac{|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.
3. $AB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$. Aire $= \left(\frac{1}{2}\right) \times AB \times d(C,(AB)) = \left(\frac{1}{2}\right) \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$.