La droite dans le plan — géométrie analytique

Chapitre 8

Repères du plan

Définition — Repère et coordonnées
Un *repère* du plan est un triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est un point du plan (l'*origine*) et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base. Si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère est dit *orthonormé*.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Ce sont les *coordonnées* de M : $M(x; y)$.

Distance entre deux points (repère orthonormé)

Théorème — Distance
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple. $A(1; 2)$, $B(4; 6)$: $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Équations d'une droite

Vecteur directeur, équation cartésienne

Définition
Un *vecteur directeur* d'une droite (D) est tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la direction de (D).

Théorème — Équation cartésienne
Toute droite (D) du plan admet une *équation cartésienne* de la forme :

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant une telle équation est une droite. Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

Exemple. La droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3;2)$.

Équation réduite (forme $y = mx + p$)

Théorème — Équation réduite
Une droite *non verticale* (c'est-à-dire non parallèle à l'axe des ordonnées) admet une équation **réduite** de la forme :

$$y = mx + p,$$

où m est la *pente* (ou *coefficient directeur*) et p est l'*ordonnée à l'origine* (l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe des ordonnées).

Propriété
Une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) admet une équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple. L'équation réduite de la droite passant par $A(1;3)$ et $B(4;9)$: pente $m = \frac{9-3}{4-1} = 2$. Comme $A \in (D)$: $3 = 2 \times 1 + p$, donc $p = 1$. Équation : $y = 2x + 1$.

Équation paramétrique

Théorème
Soit (D) une droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta)$. Un point $M(x;y)$ appartient à (D) si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t. \end{cases}$$

Ce système est appelé une *représentation paramétrique* de (D).

Exemple. Représentation paramétrique de la droite passant par $A(2;1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2)$: $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Équation d'une droite à partir d'éléments donnés

Droite passant par un point avec un vecteur directeur

Si $A(x_A; y_A) \in (D)$ et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ est vecteur directeur, alors un point $M(x;y)$ est sur (D) ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, soit :

$$(x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0.$$

Droite passant par deux points

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts, alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ est un vecteur directeur de (AB). La pente (si la droite n'est pas verticale) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Parallélisme et perpendicularité

Théorème — Parallélisme
Deux droites de pentes respectives m et m' sont **parallèles** si et seulement si $m = m'$ (deux droites verticales sont aussi parallèles).

Théorème — Perpendicularité (en repère orthonormé)
Deux droites non verticales de pentes m et m' sont **perpendiculaires** si et seulement si $m \times m' = -1$.

Exemple. Les droites $y = 2x + 1$ et $y = -\left(\frac{1}{2}\right)x + 3$ sont perpendiculaires.

Intersection de deux droites

L'intersection se trouve en résolvant le système formé par les deux équations.

Exemple. Trouver l'intersection de $(D_1) : y = 2x - 1$ et $(D_2) : y = -x + 5$. $2x - 1 = -x + 5 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2$, puis $y = 3$. Donc le point d'intersection est $(2; 3)$.

Distance d'un point à une droite (repère orthonormé)

Théorème — Distance d'un point à une droite
Soit $(D) : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $M(x_0; y_0)$. Alors :

$$d(M, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple. Distance du point $A(1; 2)$ à la droite $(D) : 3x - 4y + 5 = 0$: $d(A, (D)) = |3 - 8 + 5\frac{|}{\sqrt{9+16}} = \frac{0}{5} = 0$. Donc $A \in (D)$. Vérification : $3(1) - 4(2) + 5 = 0$. ✓