

La projection dans le plan

Chapitre 7

Définition de la projection parallèle

Définition — Projeté d'un point

Soient (D) et (Δ) deux droites **non parallèles** (sécantes ou perpendiculaires) du plan. Pour tout point M du plan, on appelle *projeté* de M sur (D) parallèlement à (Δ) l'unique point M' d'intersection de la droite (D) et de la parallèle à (Δ) passant par M .

L'application qui à tout point M associe son projeté M' s'appelle la *projection sur (D) parallèlement à (Δ)* .

Exemple. Si (Δ) est perpendiculaire à (D) , on parle de *projection orthogonale*. C'est le cas particulier le plus utilisé en géométrie.

Cas particulier : projeté d'un point de la droite

Si $M \in (D)$, alors la parallèle à (Δ) passant par M rencontre (D) en M lui-même : la projection laisse invariant chaque point de (D) .

Propriétés fondamentales

Théorème — Conservation de l'alignement

La projection conserve l'alignement : si trois points A, B, C sont alignés, leurs projetés A', B', C' sont aussi alignés (ils sont d'ailleurs tous sur (D)).

Théorème — Conservation du milieu

Le projeté du milieu d'un segment est le milieu des projetés des extrémités. Plus précisément, si I est le milieu de $[AB]$ et A', B', I' leurs projetés respectifs, alors I' est le milieu de $[A'B']$.

Théorème — Conservation des rapports

Soit A, B, C trois points alignés sur une droite (L) avec $A \neq B$, et A', B', C' leurs projetés. Alors :

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

Si l'on travaille avec des mesures algébriques :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Le théorème de Thalès revisité

Théorème — Théorème de Thalès

Soient (d_1) et (d_2) deux droites sécantes en A . Soient $B \in (d_1)$, $C \in (d_1)$ d'une part, et $B' \in (d_2)$, $C' \in (d_2)$ d'autre part, tels que les droites (BB') et (CC') soient parallèles. Alors :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Démonstration. La projection sur (d_2) parallèlement à la direction (BB') envoie B sur B' , C sur C' et A sur A (car $A \in (d_2)$). Par conservation des rapports le long de (d_1) : $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$. Pour la troisième égalité, on utilise le triangle et un raisonnement analogue dans la configuration parallèle. ■

Exemple. Soit ABC un triangle. M est un point de $[AB]$ tel que $AM = (\frac{1}{3})AB$. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N . Alors $AN = (\frac{1}{3})AC$ et $MN = (\frac{1}{3})BC$.

Réciproque du théorème de Thalès

Théorème — Réciproque

Si A, B, C sont alignés ($B \neq A$), A, B', C' alignés ($B' \neq A$), et si :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC},$$

et que B' et B sont du même côté de A (et de même C' et C), alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

Projection et vecteurs

Propriété — Conservation de la colinéarité

Soit p la projection sur (D) parallèlement à (Δ) . Pour tous points A, B, C, D :

$p(A)p(B)$ et $p(C)p(D)$ sont colinéaires si et seulement si \overline{AB} et \overline{CD} le sont (sur (D)).

La projection envoie un vecteur \overline{AB} sur le vecteur $\overline{A'B'}$, qui est colinéaire à (D) .

Composition de projections

Considérer la projection p_1 sur (D) parallèlement à (Δ) puis p_2 sur (D') parallèlement à (Δ') : le point M est envoyé sur $p_2(p_1(M))$. La composition n'est en général pas une projection, mais une *application affine* particulière (translations, homothéties — voir chapitre 10).

Exemple. Si $(D) = (D')$ et $(\Delta) = (\Delta')$, $p_2 \circ p_1 = p_1$: projeter deux fois sur la même droite ne change rien après la première fois.