Corrigés — Calcul vectoriel dans le plan

Chapitre 6

Vecteurs et opérations

Solution 1.

1. Dans un parallélogramme $ABCD$, $AB = DC$ et $(AB) \parallel (DC)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont mêmes direction, sens, norme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (la diagonale issue de A).
3. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles).

Solution 2.

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ (Chasles répétée).
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (utiliser $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, puis Chasles).
3. $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Solution 3.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right) = 2\overrightarrow{AI} + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$.

Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Colinéarité

Solution 4.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\det = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$. Colinéaires. Coefficient : $\vec{v} = -2\vec{u}$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{w}$: $\det = 3 \times 5 - 1 \times (-2) = 17 \neq 0$. Non colinéaires.

Solution 5.

$\overrightarrow{AB}(2; 3)$, $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$. Déterminant : $2 \times (-3) - (-2) \times 3 = -6 + 6 = 0$. **Alignés.** En fait $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, donc C est le symétrique de B par rapport à A.

Solution 6.

$\overrightarrow{AB}(3; 3)$, $\overrightarrow{CD}(4; 4)$. $\det = 3 \times 4 - 4 \times 3 = 0$. Donc $(AB) \parallel (CD)$.

Centre de gravité

Solution 7.
$\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$.

Démonstration : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En insérant M : $\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$, soit $3\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. D'où $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$.

Solution 8.
$G = \left(\frac{0-2+5}{3}, \frac{3+1-1}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right) = (1, 1)$.

Coordonnées et calculs

Solution 9.
1. $\overrightarrow{AB}(3-(-1); -2-4) = (4; -6)$. $\overrightarrow{AC}(0-(-1); 5-4) = (1; 1)$. $\overrightarrow{BC}(0-3; 5-(-2)) = (-3; 7)$.
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(5; -5)$. $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}(8-1; -12-1) = (7; -13)$.
3. $AB = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Solution 10.
Alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires. $\overrightarrow{AB}(2; 4)$, $\overrightarrow{AC}(x-2; 8)$. Déterminant : $2 \times 8 - (x-2) \times 4 = 16 - 4x + 8 = 24 - 4x$. Annule pour $x = 6$.

Synthèse

Solution 11.
1. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$ par Chasles.
2. Centre de gravité G de ABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Centre de gravité G' de MNP : $\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P} = \vec{0}$.

   Or $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$. En sommant $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ pour un point O quelconque, on retrouve $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ après simplifications (les termes $\left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$, $\left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$, $\left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA}$ se compensent par Chasles).

   Donc $G' = G$.

Solution 12.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donne : $(4-1, 3-2) = (2-x_D, 7-y_D)$, soit $3 = 2 - x_D$ et $1 = 7 - y_D$. D'où $x_D = -1$, $y_D = 6$. $\boldsymbol{D(-1; 6)}$.

Solution 13.
Soit A', B', C' les milieux. G centre de gravité de ABC vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Par les milieux : $\overrightarrow{GA'} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$, et de même pour B', C'.

Sommer : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right)\right] = \left(\frac{1}{2}\right) \times 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \vec{0}$.

Donc G est aussi le centre de gravité de $A'B'C'$.