Le calcul vectoriel dans le plan

Chapitre 6

Vecteurs et translations

Définition — Vecteur du plan
Soit A et B deux points du plan. Le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ est l'objet géométrique caractérisé par :
- sa *direction* (la droite (AB)),
- son *sens* (de A vers B),
- sa *norme* (la longueur AB).

Tous les vecteurs ayant les mêmes direction, sens et norme sont égaux : un vecteur n'est pas attaché à un point particulier.

Propriété — Caractérisation par les milieux
Soient A, B, C, D quatre points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu}$$

(autrement dit, $ABDC$ est un parallélogramme — éventuellement aplati).

Opérations sur les vecteurs

Somme — relation de Chasles

Théorème — Relation de Chasles
Pour tous points A, B, C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Propriété — Règle du parallélogramme
La somme $\vec{u} + \vec{v}$ se construit en plaçant les deux vecteurs à partir d'un même point ; le vecteur somme est la diagonale du parallélogramme obtenu.

Multiplication par un scalaire

Définition
Soit $\vec{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$. Le vecteur $k\vec{u}$ a :
- même direction que $\vec{u}$,
- même sens si $k > 0$, sens opposé si $k < 0$,
- norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété — Propriétés de calcul
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tous réels k, k' :
1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
3. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.
4. $1 \times \vec{u} = \vec{u}$.

Colinéarité de deux vecteurs

Définition — Vecteurs colinéaires
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, ou si $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété — Conséquences géométriques
1. Trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Milieu et centre de gravité

Théorème — Caractérisation vectorielle du milieu
I est le *milieu* de $[AB]$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}, \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Théorème — Centre de gravité d'un triangle
Soit ABC un triangle. Le *centre de gravité* G est le point d'intersection des trois médianes. Il est caractérisé par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

De manière équivalente, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).$$

Démonstration. Soit A' le milieu de $[BC]$. La médiane (AA') passe par G, et un résultat classique de géométrie affirme que G est aux $\frac{2}{3}$ de cette médiane à partir de A. Cela donne $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AA'}$. En utilisant $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, on obtient $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, puis le résultat vectoriel par Chasles. ■

Base et coordonnées d'un vecteur

Définition — Base du plan
Une *base* du plan est un couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de deux vecteurs non colinéaires.

Théorème — Décomposition d'un vecteur
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** couple de réels (x, y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Les nombres x et y sont les *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\binom{x}{y}$.

Exemple. Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ a pour coordonnées $(2; -3)$.

Coordonnées d'une somme et d'un produit par un scalaire

Propriété
Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et $k \in \mathbb{R}$.
1. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.
2. $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.
3. $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x'$ et $y = y'$.

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Si l'on rapporte le plan à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et que A et B ont pour coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Exemple. Soient $A(1; 2)$ et $B(4; -1)$ dans un repère du plan. $\overrightarrow{AB}(3; -3)$.

Critère de colinéarité par les coordonnées

Théorème — Déterminant et colinéarité
Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans une base du plan. Le *déterminant* de $(\vec{u},\vec{v})$ est :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y.$$

Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad xy' - x'y = 0.$$

Démonstration. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $x' = kx$ et $y' = ky$, donc $xy' - x'y = x(ky) - (kx)y = 0$. Réciproquement, si $xy' - x'y = 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ (au moins $x \neq 0$ ou $y \neq 0$), alors les vecteurs sont proportionnels (à vérifier en exercice). ■

Exemple. $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(-4;6)$: $2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{v} = -2\vec{u}$).

Exemple. Trois points $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(7;11)$ sont-ils alignés ? $\overrightarrow{AB}(2;3)$ et $\overrightarrow{AC}(6;9)$. Déterminant : $2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0$. Oui, alignés.