Exercices — Calcul vectoriel dans le plan

Chapitre 6

Vecteurs et opérations

Exercice 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Justifier les égalités suivantes :
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;
3. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2. Simplifier les expressions vectorielles suivantes :
1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$;
3. $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$;
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois points et I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Colinéarité

Exercice 4. Dans un plan rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $\vec{u}(3; -2)$, $\vec{v}(-6; 4)$, $\vec{w}(1; 5)$.
1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, donner le coefficient de proportionnalité.
2. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 5. Soient $A(1; -1)$, $B(3; 2)$, $C(-1; -4)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exercice 6. Soient $A(2; 1)$, $B(5; 4)$, $C(-1; -2)$ et $D(3; 2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Centre de gravité

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On note G son centre de gravité. Calculer le vecteur $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ pour un point M quelconque.

Exercice 8. Dans un repère, soient $A(0; 3)$, $B(-2; 1)$ et $C(5; -1)$. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Indication : utiliser $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Coordonnées et calculs

Exercice 9. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $A(-1;4)$, $B(3;-2)$, $C(0;5)$.
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et de $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. Calculer la longueur AB (en repère orthonormé : utiliser $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$).

Exercice 10. On considère $A(2;-1)$, $B(4;3)$ et $C(x;7)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x les points A, B, C sont-ils alignés ?

Synthèse

Exercice 11. Soit ABC un triangle. On définit les points M, N, P par : $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA}$.
1. Démontrer que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.
2. Démontrer que les triangles ABC et MNP ont le même centre de gravité.

Exercice 12. Dans un repère, soient $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(2;7)$. Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
1. Calculer les coordonnées de D.

Indication : utiliser $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exercice 13. Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soient A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Démontrer que G est aussi le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.