Corrigés — Équations, inéquations et systèmes

Chapitre 5

Équations du premier et du second degré

Solution 1.
1. $4x - 7 = 2x + 5 \iff 2x = 12 \iff x = 6$. $S = \{6\}$.
2. Multiplier par 6 : $3(x-3) + 2(2x+1) = 6$, soit $3x - 9 + 4x + 2 = 6$, soit $7x = 13$, $x = \frac{13}{7}$. $S = \left\{\frac{13}{7}\right\}$.
3. $x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 16 + 20 = 36$, $x = \frac{4 \pm 6}{2}$, soit $x = 5$ ou $x = -1$.
4. $2x^2 + x - 6 = 0$: $\Delta = 1 + 48 = 49$, $x = \frac{-1 \pm 7}{4}$, soit $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -2$.
5. $x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. $S = \emptyset$.

Solution 2.
1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Poser $X = x^2$: $X^2 - 13X + 36 = 0$, $\Delta = 169 - 144 = 25$, $X = 4$ ou $X = 9$. Donc $x^2 \in \{4, 9\}$, soit $x \in \{-3, -2, 2, 3\}$.
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. $X^2 - 5X + 4 = 0$, $X = 1$ ou $X = 4$, soit $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Équations avec valeur absolue

Solution 3.
1. $|x - 2| = 5 \iff x - 2 = \pm 5$, soit $x = 7$ ou $x = -3$.
2. $|3x + 1| = 7 \iff 3x + 1 = \pm 7$, soit $x = 2$ ou $x = -\frac{8}{3}$.
3. $|x - 1| = |2x + 3| \iff x - 1 = 2x + 3$ ou $x - 1 = -(2x + 3)$, soit $x = -4$ ou $x = -\frac{2}{3}$.
4. $|x^2 - 4| = 5 \iff x^2 - 4 = \pm 5$. Premier cas : $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Second : $x^2 = -1$, impossible. Donc $S = \{-3, 3\}$.

Solution 4.
Trois cas selon la position de x :
- Si $x < 1$: $|x - 1| = 1 - x$ et $|x - 3| = 3 - x$. Équation : $(1 - x) + (3 - x) = 4$, soit $4 - 2x = 4$, $x = 0$. ✓ $(0 < 1)$.
- Si $1 \le x \le 3$: $|x - 1| = x - 1$ et $|x - 3| = 3 - x$. Équation : $(x - 1) + (3 - x) = 4$, soit $2 = 4$. Impossible.
- Si $x > 3$: $|x - 1| = x - 1$ et $|x - 3| = x - 3$. Équation : $(x - 1) + (x - 3) = 4$, soit $2x = 8$, $x = 4$. ✓ $(4 > 3)$.

$S = \{0, 4\}$.

Équations avec radical

Solution 5.

1. $\sqrt{2x+1} = 3$: conditions $2x+1 \geq 0$ $(x \geq -\frac{1}{2})$ et $3 \geq 0$ (ok). Élever : $2x+1 = 9$, $x = 4$. Vérif : $\sqrt{9} = 3$. ✓ $S = \{4\}$.
2. $\sqrt{x^2-4} = x-1$: conditions $x^2 \geq 4$ $(x \leq -2$ ou $x \geq 2)$ et $x-1 \geq 0$ $(x \geq 1)$. Donc $x \geq 2$. Élever : $x^2-4 = (x-1)^2 = x^2-2x+1$, soit $-4 = -2x+1$, $x = \frac{5}{2}$. Vérif : $\sqrt{\frac{25}{4}-4} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{5}{2}-1$. ✓
3. $\sqrt{x+4} = x-2$: $x+4 \geq 0$ $(x \geq -4)$ et $x-2 \geq 0$ $(x \geq 2)$. Élever : $x+4 = (x-2)^2$, soit $x+4 = x^2-4x+4$, $x^2-5x = 0$, $x(x-5) = 0$. Candidats : 0 ou 5. Seul $5 \geq 2$. Vérif : $\sqrt{9} = 3 = 5-2$. ✓ $S = \{5\}$.
4. $x - \sqrt{x} - 6 = 0$: poser $X = \sqrt{x} \geq 0$. $X^2 - X - 6 = 0$, $\Delta = 25$, $X = 3$ ou $X = -2$. Garder $X = 3$, donc $x = 9$. Vérif : $9-3-6 = 0$. ✓

Inéquations

Solution 6.

1. $-3x+2 \geq 5 \iff -3x \geq 3 \iff x \leq -1$. $S =]-\infty, -1]$.
2. $2x-2-3x-12 < 0 \iff -x-14 < 0 \iff x > -14$. $S =]-14, +\infty[$.
3. Tableau de signes pour $\frac{2x-1}{x+1}$: zéros en $x = \frac{1}{2}$ et $x = -1$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
Quotient		$+$	interdit	$-$	0	$+$

≤ 0 : $S =]-1, \frac{1}{2}]$.

Solution 7.

$x^2-5x+4 \geq 0$: racines $x = 1$ et $x = 4$. Coefficient de x^2 positif → trinôme positif à l'extérieur des racines. $S =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$.

Solution 8.

1. $(x-1)(x+3) > 0$: signe d'un trinôme à racines -3 et 1, positif extérieur. $S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.
2. $(x^2-1)(x-2) \leq 0$. Tableau (zéros $-1, 1, 2$) :

x	$-\infty$		-1		1		2	$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

≤ 0 : $S =]-\infty, -1] \cup [1, 2]$.
3. $\frac{x-2}{x^2-1} \geq 0$: zéros $x = 2$, valeurs interdites $x = \pm 1$. Tableau analogue donne $S =]-1, 1[\cup [2, +\infty[$.

Systèmes 2×2

Solution 9.
1. Substitution : $x = y + 1$. $3(y+1) + 2y = 12$, $5y = 9$, $y = \frac{9}{5}$, $x = \frac{14}{5}$. $S = \{(\frac{14}{5}, \frac{9}{5})\}$.
2. Combinaison : $L_1 + 3L_2$: $5x - 3y + 6x + 3y = 7 + 24$, soit $11x = 31$, $x = \frac{31}{11}$. Et $y = 8 - 2x = \frac{26}{11}$.
3. Multiplier L_1 par 6 : $3x + 2y = 6$. Combiner avec $L_2 = x - y = 1$ multipliée par 2 : $2x - 2y = 2$. Somme : $5x = 8$, $x = \frac{8}{5}$, $y = x - 1 = \frac{3}{5}$.

Solution 10.
Déterminant : $D = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.
- Si $m \neq \pm 1$: $D \neq 0$, **unique solution** (Cramer).
- Si $m = 1$: système devient $x + y = 1$ (équations identiques). **Infinité de solutions** (toute la droite).
- Si $m = -1$: système devient $-x + y = 1$ et $x - y = 1$, contradiction. **Aucune solution**.

Système 3×3

Solution 11.
$L_2 - 2L_1$: $-3y - z = -4$, soit $3y + z = 4$. $L_3 - L_1$: $y - 2z = 1$.

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Pour éliminer y entre les deux dernières, calculons $L_2 - 3L_3$: $(3y + z) - 3(y - 2z) = 4 - 3$, soit $7z = 1$, donc $z = \frac{1}{7}$. Puis $y = 1 + 2z = \frac{9}{7}$ et $x = 3 - y - z = 3 - \frac{10}{7} = \frac{11}{7}$.

$S = \{(\frac{11}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{7})\}$.

Inéquations à deux inconnues

Solution 12.
Quatre demi-plans :

- $x + y \leq 6$ (en dessous de la droite $x + y = 6$).
- $x \geq 0$ (à droite de l'axe Oy).
- $y \geq 0$ (au-dessus de l'axe Ox).
- $y \leq 2x$ (en dessous de la droite $y = 2x$).

L'intersection est un polygone dont les sommets se trouvent par intersections deux à deux :

- $(0; 0)$: intersection $x = 0$ et $y = 0$.
- $(6; 0)$: intersection $y = 0$ et $x + y = 6$.
- $(2; 4)$: intersection $y = 2x$ et $x + y = 6$, qui donnent $3x = 6$, $x = 2$, $y = 4$.

Triangle de sommets $(0; 0)$, $(6; 0)$, $(2; 4)$.

Synthèse

Solution 13.
Soit x le nombre d'articles à 50 dh et y ceux à 70 dh. Le système s'écrit $x + y = 12$ et $50x + 70y = 720$.

En substituant $y = 12 - x$ dans la deuxième équation : $50x + 70(12 - x) = 720$, soit $-20x + 840 = 720$, donc $x = 6$ et $y = 6$.

Donc 6 articles à 50 dh et 6 articles à 70 dh.

Solution 14.
Les nombres sont racines de $T^2 - 11T + 24 = 0$. $\Delta = 121 - 96 = 25$, $T = \frac{11 \pm 5}{2} = 3$ ou 8. Les nombres sont 3 et 8.