

Équations, inéquations et systèmes

Chapitre 5

Équations du premier et du second degré

Définition

Une *équation* dans \mathbb{R} est une égalité contenant au moins une inconnue. *Résoudre* l'équation, c'est déterminer l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie. Cet ensemble s'appelle *ensemble des solutions*, souvent noté S .

Équation du premier degré

Théorème

L'équation $ax + b = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ admet une unique solution $x = -\frac{b}{a}$.

Exemple. $3x - 5 = 7 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$. Donc $S = \{4\}$.

Équation du second degré

Théorème

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$: une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$: aucune solution réelle, $S = \emptyset$.

Exemple. Résoudre $x^2 - 6x + 5 = 0$. $\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$. $x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$, $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$. Donc $S = \{1, 5\}$.

Équations avec valeur absolue

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. L'équation $|x - a| = r$ équivaut à $x = a + r$ ou $x = a - r$. Plus généralement, $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = B(x)$ ou $A(x) = -B(x)$.

Exemple. Résoudre $|2x - 3| = 5$. $2x - 3 = 5$ donne $x = 4$; $2x - 3 = -5$ donne $x = -1$. Donc $S = \{-1, 4\}$.

Exemple. Résoudre $|x + 1| = |2x - 3|$. Cela équivaut à $x + 1 = 2x - 3$ ou $x + 1 = -(2x - 3) = -2x + 3$. Premier cas : $x = 4$. Second cas : $3x = 2$ donc $x = \frac{2}{3}$. Donc $S = \{\frac{2}{3}, 4\}$.

Équations avec radical

Théorème — Méthode

Pour résoudre $\sqrt{A(x)} = B(x)$:

1. Conditions d'existence : $A(x) \geq 0$.
2. Condition de positivité du second membre : $B(x) \geq 0$ (sinon pas de solution).
3. Élever au carré : $A(x) = B(x)^2$.
4. **Vérifier** les solutions trouvées dans l'équation initiale.

Exemple. Résoudre $\sqrt{x + 1} = x - 1$.

- Existence : $x \geq -1$. Positivité : $x \geq 1$.
- Élevons au carré : $x + 1 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, soit $x^2 - 3x = 0$, soit $x(x - 3) = 0$. Solutions candidates : 0 et 3.
- Vérification : $x = 0$ ne respecte pas $x \geq 1$; $x = 3$: $\sqrt{4} = 2$ et $3 - 1 = 2$. ✓

Donc $S = \{3\}$.

Inéquations

Inéquations du premier degré

Théorème

$ax + b \leq 0$ équivaut à $x \leq -\frac{b}{a}$ si $a > 0$, et à $x \geq -\frac{b}{a}$ si $a < 0$.

Inéquations du second degré

On utilise la règle du signe du trinôme (voir Chapitre 4).

Exemple. Résoudre $x^2 - x - 6 < 0$. Le trinôme a pour racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$ (somme 1, produit -6). Comme le coefficient de x^2 est positif, $x^2 - x - 6 < 0$ entre les racines. Donc $S =] - 2, 3[$.

Inéquations produit / quotient — tableau de signes

Exemple. Résoudre $(x - 1)(2x + 4) \geq 0$. Tableau de signes (les zéros sont $x = 1$ et $x = -2$) :

x	$-\infty$		-2		1	$+\infty$
$x - 1$		-	-	-	0	+
$2x + 4$		-	0	+	+	+
Produit		+	0	-	0	+

Donc $S =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

Systèmes linéaires 2×2

Définition

Un *système linéaire de deux équations à deux inconnues* x, y est :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.

Méthodes de résolution

Théorème — Méthode par substitution

Exprimer une inconnue en fonction de l'autre depuis une équation, puis remplacer dans la seconde.

Théorème — Méthode par combinaison

Multiplier les équations par des coefficients bien choisis pour éliminer l'une des inconnues par addition.

Théorème — Méthode du déterminant (Cramer 2×2)

Soit $D = ab' - a'b$ le *déterminant* du système.

- Si $D \neq 0$, le système admet une **unique solution** :

$$x = \frac{cb' - c'b}{D}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{D}.$$

- Si $D = 0$ et le système n'est pas proportionnel : aucune solution.
- Si $D = 0$ et le système est proportionnel : une infinité de solutions.

Exemple. Résoudre $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-y=1 \end{cases}$. Méthode par substitution : $x = y + 1$. Substitution dans la première : $2(y + 1) + 3y = 8$, soit $5y = 6$, donc $y = \frac{6}{5}$ et $x = \frac{11}{5}$. $S = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{6}{5} \right) \right\}$.

Systèmes 3×3 — méthode du pivot

Pour un système de trois équations à trois inconnues, on utilise une méthode d'élimination (pivot de Gauss) consistant à éliminer successivement les inconnues pour se ramener à un système triangulaire.

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : -3y - z = -9$, soit $3y + z = 9$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : y - 2z = -4$.
- Le système devient $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3y+z=9 \\ y-2z=-4 \end{cases}$.
- $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 : -7z = -21$, soit $z = 3$.
- Puis $3y + 3 = 9$ donne $y = 2$, et $x + 2 + 3 = 6$ donne $x = 1$.

$$S = \{(1, 2, 3)\}.$$

Systèmes d'inéquations à deux inconnues

Une inéquation linéaire à deux inconnues $ax + by \leq c$ définit un *demi-plan* dans le plan rapporté à un repère. L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires est l'intersection des demi-plans correspondants — souvent un polygone (parfois non borné).

Exemple. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. C'est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$ — frontières comprises.