

Corrigés — Les polynômes

Chapitre 4

Calcul et opérations

Solution 1.

1. P_1 : degré 4, coefficient dominant 3.
2. $P_2 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$: trois facteurs du premier degré, donc degré 3, coefficient dominant 1.
3. $P_3 = (2x + 1)^2 - 4x^2 = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 = 4x + 1$: degré 1, coefficient dominant 4.

Solution 2.

1. $A + B = x^3 + (-2 + 1)x^2 + x + (5 - 3) = x^3 - x^2 + x + 2$.
2. $A - 2B = x^3 - 2x^2 + 5 - 2(x^2 + x - 3) = x^3 - 4x^2 - 2x + 11$.
3. $A \times B = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^2 + x - 3) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x^2 + 5x - 15 = x^5 - x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 5x - 15$. Degré 5.

Solution 3.

- (a) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Donc $Q = x^2 + x + 1$, $R = 0$.
- (b) Division de $2x^3 + 3x^2 - x + 4$ par $x^2 + 1$: $2x^3 \div x^2 = 2x$. $2x(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$. Reste partiel : $3x^2 - 3x + 4$. $3x^2 \div x^2 = 3$. $3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3$. Reste : $-3x + 1$. Donc $Q = 2x + 3$, $R = -3x + 1$.
- (c) $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$ (factorisation directe). Donc $Q = x^2 - 2$, $R = 0$.

Identités remarquables

Solution 4.

1. $(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = (x^2 + 10x + 25) - (x^2 - 10x + 25) = 20x$.
2. $(2a - 3b)(2a + 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.
3. $(x - 1)^3 + (x + 1)^3$: utiliser $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ avec $a = x - 1$, $b = x + 1$: $a + b = 2x$; ou développer. Le résultat est $2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$.

Solution 5.

1. $9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$.
2. $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

3. $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

4. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

5. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$.

Racines et factorisation

Solution 6.

1. $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0 \checkmark$; $P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0 \checkmark$; $P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0 \checkmark$.

2. Trois racines pour un polynôme de degré 3 : $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Vérification : $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$; multiplier par $(x - 3)$: $x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. \checkmark

Solution 7.

$P(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$; $P(2) = 8 + 4 - 8 - 4 = 0$; $P(-2) = -8 + 4 + 8 - 4 = 0$. Donc P a trois racines $-2, -1, 2$.

Comme P est de degré 3, $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Trinôme du second degré

Solution 8.

(a) $P(x) = x^2 - 5x + 6$. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Racines : $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. $P(x) = (x - 2)(x - 3)$. Signe : positif sauf entre 2 et 3 où il est négatif.

(b) $Q(x) = -2x^2 + 4x - 2 = -2(x^2 - 2x + 1) = -2(x - 1)^2$. $\Delta = 16 - 16 = 0$. Racine double $x_0 = 1$. Signe : $Q(x) \leq 0$ partout, $Q(1) = 0$.

(c) $R(x) = x^2 + x + 1$. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Aucune racine réelle. Signe : positif partout (même signe que $a = 1$).

(d) $S(x) = 3x^2 - 7x + 2$. $\Delta = 49 - 24 = 25$. Racines $x_1 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{7+5}{6} = 2$. $S(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. Signe : positif hors $[\frac{1}{3}, 2]$, négatif dedans.

Solution 9.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3$. Minimum -3 atteint en $x = 2$.

(b) $g(x) = 2(x^2 + 6x) + 7 = 2[(x + 3)^2 - 9] + 7 = 2(x + 3)^2 - 11$. Minimum -11 atteint en $x = -3$.

Solution 10.

Les nombres x, y sont les racines de $T^2 - ST + P = 0$ avec $S = x + y$, $P = xy$.

1. $S = 8, P = 15$. Racines de $T^2 - 8T + 15 = 0$: $\Delta = 64 - 60 = 4, T = 3$ ou 5 . Donc $\{x, y\} = \{3, 5\}$.
2. $S = -3, P = -10$. $T^2 + 3T - 10 = 0, \Delta = 9 + 40 = 49, T = \frac{-3 \pm 7}{2} = 2$ ou -5 . $\{x, y\} = \{-5, 2\}$.
3. $S = 4, P = 5$. $T^2 - 4T + 5 = 0, \Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. **Aucune solution réelle.**

Synthèse

Solution 11.

1. $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \checkmark$.
2. Division de P par $(x - 1)$: on a $P(x) = (x - 1)Q(x)$. Calcul : $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$. **Vérification** : développer.
3. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ (somme -1 , produit -6). Donc $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$, et $P(x) = 0 \iff x \in \{-3, 1, 2\}$.

Solution 12.

1. $f(1) = 1 - (a + 1) + a = 0$. Donc 1 est racine.
2. $f(x) = (x - 1)(x - a)$ (l'autre racine est a par produit $1 \times a = a$).
3. Racine double ssi $a = 1$. Alors $f(x) = (x - 1)^2$.

Solution 13.

1. $X = x^2$. L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0, \Delta = 25 - 16 = 9, X = 1$ ou $X = 4$.
2. Donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$, soit $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
3. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.