

Les polynômes

Chapitre 4

Définition et vocabulaire

Définition — Polynôme à une variable

Un *polynôme* à coefficients réels en la variable x est une expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le *degré* de P , noté $\deg P$.
- a_n est le *coefficient dominant*, a_0 est le *terme constant*.
- Si tous les coefficients sont nuls, on parle du *polynôme nul* 0 , de degré conventionnellement $-\infty$.

Exemple.

- $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 3 ; coefficient dominant 2, terme constant 1.
- $Q(x) = 7$ est un polynôme constant non nul, de degré 0.
- $R(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ est de degré 3.

Propriété — Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux. En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Opérations sur les polynômes

Propriété — Somme, produit, degré

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ (avec égalité si les coefficients dominants ne se compensent pas).
2. $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Exemple. Soit $P(x) = x^2 - 3x + 2$ et $Q(x) = 2x + 1$.

- $P + Q = x^2 - 3x + 2 + 2x + 1 = x^2 - x + 3$ (degré 2).
- $P \times Q = (x^2 - 3x + 2)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 3x + 4x + 2 = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ (degré 3).

Division euclidienne des polynômes

Théorème — Division euclidienne dans $\mathbb{R}[x]$

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q s'appelle le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B .

Exemple. Effectuer la division euclidienne de $A(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ par $B(x) = x^2 + x - 1$.

On pose la division :

- $2x^3 \div x^2 = 2x$; on multiplie B par $2x$ et on soustrait $2x \times B = 2x^3 + 2x^2 - 2x$. Reste partiel : $3x^2 + x - 6$.
- $3x^2 \div x^2 = 3$; on multiplie B par 3 et on soustrait $3B = 3x^2 + 3x - 3$. Reste : $-2x - 3$.

Donc $Q(x) = 2x + 3$ et $R(x) = -2x - 3$, soit $A = (x^2 + x - 1)(2x + 3) + (-2x - 3)$.

Racines et factorisation

Définition — Racine d'un polynôme

Un réel α est une *racine* (ou *zéro*) du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème — Théorème de la factorisation

Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff P(x) \text{ est divisible par } (x - \alpha).$$

Autrement dit, on peut écrire $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ avec Q polynôme de degré $\deg P - 1$.

Démonstration. La division euclidienne de P par $(x - \alpha)$ s'écrit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < 1$, donc R est un polynôme constant : $R(x) = r \in \mathbb{R}$. En évaluant en α : $P(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) + r = r$. Donc $r = 0$ équivaut à $P(\alpha) = 0$. ■

Exemple. Le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ admet -1 comme racine (vérification : $(-1)^3 - 4 - 1 + 6 = 0$). On peut donc le factoriser : par division par $(x + 1)$, on obtient $P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$, puis $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Finalement $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

Identités remarquables

Théorème — Identités remarquables — degrés 2 et 3

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
5. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Exemple.

- $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
- $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.
- $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$.

Le trinôme du second degré

Définition

Un *trinôme du second degré* est un polynôme de degré 2 :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Forme canonique

Théorème — Forme canonique

Tout trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le *discriminant* de P .

Démonstration. $ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x \right] + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. ■

Discussion selon le signe du discriminant

Théorème — Racines et factorisation

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$: P admet **deux racines réelles distinctes**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Si $\Delta = 0$: P admet une **racine double** $x_0 = -\frac{b}{2a}$, et $P(x) = a(x - x_0)^2$.
3. Si $\Delta < 0$: P n'a **aucune racine réelle** et n'est pas factorisable dans \mathbb{R} .

Exemple. Étudier $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$. $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$. Racines : $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$. Donc $P(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3) = (2x + 1)(x - 3)$.

Exemple. Étudier $P(x) = x^2 - 6x + 9$. $\Delta = 36 - 36 = 0$. Racine double : $x_0 = 3$. Donc $P(x) = (x - 3)^2$.

Signe d'un trinôme

Propriété — Règle du signe

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$: $P(x)$ est **du signe de a** à l'extérieur des racines, et de signe contraire entre les racines.
2. Si $\Delta = 0$: $P(x)$ est du signe de a partout, sauf en la racine double où il s'annule.
3. Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. Signe de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$: $a = -1$, $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, racines $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Comme $a = -1 < 0$, f est :

- négatif sur $] -\infty, 1[$ et sur $]3, +\infty[$;
- positif sur $]1, 3[$;
- nul en 1 et 3.

Sommes et produit des racines

Théorème — Relations entre coefficients et racines

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration. En développant $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$, on identifie avec $ax^2 + bx + c$. ■

Exemple. Sans calculer le discriminant, deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit 6 sont les racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$, soit 2 et 3.