

Exercices — Les polynômes

Chapitre 4

Calcul et opérations

Exercice 1. Donner le degré et le coefficient dominant des polynômes :

1. $P_1(x) = 3x^4 - x + 2$;
2. $P_2(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$;
3. $P_3(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2$.

Exercice 2. Soient $A(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ et $B(x) = x^2 + x - 3$. Calculer :

1. $A + B$;
2. $A - 2B$;
3. $A \times B$ (et préciser son degré).

Exercice 3. Effectuer la division euclidienne de :

1. $A(x) = x^3 - 1$ par $B(x) = x - 1$;
2. $A(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$ par $B(x) = x^2 + 1$;
3. $A(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ par $B(x) = x^2 - 1$.

Identités remarquables

Exercice 4. Développer puis réduire :

1. $(x + 5)^2 - (x - 5)^2$;
2. $(2a - 3b)(2a + 3b)$;
3. $(x - 1)^3 + (x + 1)^3$.

Exercice 5. Factoriser :

1. $9x^2 - 25$;
2. $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
3. $x^3 - 27$;
4. $x^3 + 8$;
5. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

Racines et factorisation

Exercice 6. Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

- Vérifier que 1, -2 et 3 sont racines de P .
- En déduire la factorisation complète de P .

Exercice 7. Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

- Calculer $P(-1)$, $P(2)$ et $P(-2)$.
- Factoriser P en produit de trois facteurs du premier degré.

Trinôme du second degré

Exercice 8. Pour chaque trinôme, calculer le discriminant, donner les racines réelles éventuelles, factoriser quand c'est possible, et étudier le signe :

- $P(x) = x^2 - 5x + 6$;
- $Q(x) = -2x^2 + 4x - 2$;
- $R(x) = x^2 + x + 1$;
- $S(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Exercice 9. Mettre sous forme canonique :

- $f(x) = x^2 - 4x + 1$;
- $g(x) = 2x^2 + 12x + 7$.

En déduire l'extremum (minimum ou maximum) et le réel où il est atteint.

Exercice 10. Déterminer deux nombres réels x et y tels que :

- $x + y = 8$ et $xy = 15$;
- $x + y = -3$ et $xy = -10$;
- $x + y = 4$ et $xy = 5$ (que se passe-t-il ?).

Synthèse

Exercice 11. Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

- Vérifier que 1 est racine de P .
- Déterminer le quotient de la division de P par $(x - 1)$.
- Factoriser complètement P et résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$.

- Calculer $f(1)$.
- En déduire une racine évidente puis la factorisation de f .
- Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme f a-t-il une racine double ?

Exercice 13. On considère $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

1. Effectuer le changement de variable $X = x^2$ et résoudre $X^2 - 5X + 4 = 0$.
2. En déduire l'ensemble des racines réelles de P .
3. Factoriser P dans \mathbb{R} .