Corrigés — L'ordre dans $\mathbb{R}$

Chapitre 3

Compatibilité de l'ordre

Solution 1.

1. Multiplication par $-3 < 0$: **l'ordre s'inverse**. Donc $-3a \geq -3b$.
2. Translation par $+5$: conserve l'ordre. $a + 5 \leq b + 5$.
3. Trois cas selon les signes :
   - Si $0 \leq a \leq b$: $a^2 \leq b^2$ (croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$).
   - Si $a \leq b \leq 0$: $a^2 \geq b^2$ ($x \mapsto x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$).
   - Si $a \leq 0 \leq b$: on ne peut pas conclure sans plus d'info ; comparer $|a|$ et $|b|$.

Solution 2.

Étudier le signe de $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$. Donc $x^2 + 1 \geq 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec égalité ssi $x = 1$.

Solution 3.

Comparons les carrés (les deux quantités sont positives) : $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2$.

Donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$, avec égalité ssi $\sqrt{ab} = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$.

Encadrements

Solution 4.

1. Somme : $1,414 + 1,732 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 1,415 + 1,733$, soit $3,146 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3,148$.
2. Différence : $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; on a $1,732 - 1,415 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 1,733 - 1,414$, soit $0,317 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 0,319$.
3. Produit (positifs) : $1,414 \times 1,732 \leq \sqrt{6} \leq 1,415 \times 1,733$. $1,414 \times 1,732 \approx 2,449$, $1,415 \times 1,733 \approx 2,452$. Donc $2,449 \leq \sqrt{6} \leq 2,452$.
4. Quotient : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Encadrer le numérateur par le haut et le dénominateur par le bas : $1,\frac{732}{1},415 \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \leq 1,\frac{733}{1},414$. Approximativement : $1,224 \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \leq 1,226$.

Solution 5.

Soit $-1 \leq x \leq 4$.

1. $2x-3$: multiplier par 2 et soustraire 3 : $-2-3 \leq 2x-3 \leq 8-3$, soit $-5 \leq 2x-3 \leq 5$.
2. $-x+7$: multiplier par -1 inverse : $-4 \leq -x \leq 1$; ajouter 7 : $3 \leq -x+7 \leq 8$.
3. x^2 : attention. Sur $[-1,0]$, $x^2 \in [0,1]$ (décroissance). Sur $[0,4]$, $x^2 \in [0,16]$ (croissance). Donc $0 \leq x^2 \leq 16$.
4. $\frac{1}{x+5}$: $x+5 \in [4,9]$ (positif). La fonction inverse est décroissante, donc $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{4}$.

Solution 6.
$P = 2\pi\sqrt{2}$: encadrement à 10^{-2} près. $2 \times 3,141 \times 1,414 \leq P \leq 2 \times 3,142 \times 1,415$, soit $\approx 8,884 \leq P \leq 8,892$ cm. À 10^{-2} près : $P \approx 8,89$ cm.

$A = \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$. Donc $2 \times 3,141 \leq A \leq 2 \times 3,142$, soit $6,282 \leq A \leq 6,284$ cm². À 10^{-2} près : $A \approx 6,28$ cm².

Valeurs approchées

Solution 7.
- $\frac{5}{3} = 1,6666...$: défaut $1,66$; excès $1,67$; arrondi $1,67$.
- $\sqrt{7} \approx 2,6457...$: défaut $2,64$; excès $2,65$; arrondi $2,65$.
- $\frac{\pi}{4} \approx 0,7853...$: défaut $0,78$; excès $0,79$; arrondi $0,79$.
- $\frac{22}{7} \approx 3,1428...$: défaut $3,14$; excès $3,15$; arrondi $3,14$ (plus proche).

Solution 8.
Erreur absolue : $|\sqrt{3}-1,73|$. Comme $\sqrt{3} \approx 1,7320508$, l'erreur absolue est $\approx 0,002$ m.

Erreur relative : $0,\frac{002}{1},732 \approx 0,00115 \approx 0,12\%$.

Intervalles

Solution 9.
1. $[-2,5[$.
2. $]3,+\infty[$.
3. $]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$.

Solution 10.
1. $[-3,2] \cap]-1,4] =]-1,2]$.
2. $]-\infty,5[\cap [-2,8] = [-2,5[$.
3. $[1,4[\cup [3,6] = [1,6]$.
4. $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ — pas un intervalle.

Solution 11.
$[-3, a] \subseteq [-3, 5]$ équivaut à $-3 \leq a \leq 5$ (et il faut que $-3 \leq a$ pour que l'intervalle soit non vide).

Donc $a \in [-3, 5]$.

Synthèse

Solution 12.
$f(x) = 2x + 5$. Pour $1,4 \leq x \leq 2,3$: $2 \times 1,4 + 5 \leq 2x + 5 \leq 2 \times 2,3 + 5$, soit $7,8 \leq f(x) \leq 9,6$.

Solution 13.
$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Application : avec $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ (réels positifs), l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ devient $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Comme $xy = 1$, $\sqrt{xy} = 1$, donc $x + y \geq 2$.

Solution 14.
1. $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{16} = 4$. Comme $9 < 11 < 16$, on a $3 < \sqrt{11} < 4$.
2. $3,3^2 = 10,89 < 11$ et $3,4^2 = 11,56 > 11$. Comme `sqrt` est croissante, $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$.