

# L'ordre dans $\mathbb{R}$

## Chapitre 3

### Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

---

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation d'ordre  $\leq$  qui prolonge celle connue sur  $\mathbb{Q}$ . Comprendre comment elle interagit avec les opérations est essentiel pour résoudre des inéquations et donner des encadrements.

#### Définition — Comparaison

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On écrit :

- $a \leq b$  si  $b - a \in \mathbb{R}_+$  (c'est-à-dire  $b - a \geq 0$ ).
- $a < b$  si  $b - a > 0$ .

La relation  $\leq$  est **totale** : pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $a \leq b$  ou  $b \leq a$  (et les deux si et seulement si  $a = b$ ).

### Compatibilité avec les opérations

---

#### Théorème — Compatibilité avec l'addition

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Alors  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ . Par conséquent,  $a \leq b$  et  $c \leq d$  entraînent  $a + c \leq b + d$ .

*Démonstration.*  $a \leq b$  équivaut à  $b - a \geq 0$ , ce qui équivaut à  $(b + c) - (a + c) \geq 0$ , c'est-à-dire  $a + c \leq b + c$ . ■

#### Théorème — Compatibilité avec la multiplication

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $k > 0$  et  $a \leq b$ , alors  $ka \leq kb$ .
2. Si  $k < 0$  et  $a \leq b$ , alors  $ka \geq kb$  (le sens change).

**Exemple.**  $-3 \leq 2$ . En multipliant par  $-4 < 0$  :  $12 \geq -8$ , ce qui est correct.

#### Propriété — Sens et opposés

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$a \leq b \iff -b \leq -a.$$

Pour tous  $a, b > 0$  ayant le même signe :

$$a \leq b \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

**Exemple.** Sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $2 < 5$  donne  $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ . La fonction inverse renverse l'ordre sur les réels strictement positifs.

## Ordre et carré, ordre et racine carrée

### Théorème — Carré et ordre

1. Sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $x \mapsto x^2$  est croissante :  $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$ .
2. Sur  $\mathbb{R}_-$ , la fonction  $x \mapsto x^2$  est décroissante :  $a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$ .

*Démonstration.* Pour le premier point :  $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ . Comme  $0 \leq a \leq b$ ,  $b - a \geq 0$  et  $b + a \geq 0$ , donc le produit est positif. ■

### Théorème — Racine carrée et ordre

Sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante :  $0 \leq a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ .

**Exemple.** Comparer  $A = \sqrt{7} + \sqrt{11}$  et  $B = \sqrt{8} + \sqrt{10}$ . Élevons au carré (les deux quantités sont positives) :  $A^2 = 7 + 11 + 2\sqrt{77} = 18 + 2\sqrt{77}$  et  $B^2 = 8 + 10 + 2\sqrt{80} = 18 + 2\sqrt{80}$ . Comme  $77 < 80$ ,  $\sqrt{77} < \sqrt{80}$  donc  $A < B$ .

## Intervalles de $\mathbb{R}$

### Définition — Les neuf types d'intervalles

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \leq b$ .

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  — fermé borné.
- $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  — ouvert borné.
- $[a, b[$  et  $]a, b]$  — semi-ouverts.
- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$  et  $]a, +\infty[$ .
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  et  $] - \infty, b[$ .
- $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

## Intersection et réunion d'intervalles

### Exemple.

- $[1, 5] \cap [3, 7] = [3, 5]$ .
- $[1, 5] \cup [3, 7] = [1, 7]$ .
- $] - \infty, 2[ \cap [0, +\infty[ = [0, 2[$ .

- $[1, 3] \cup [5, 7]$  n'est pas un intervalle.

## Bornes d'une partie de $\mathbb{R}$

### Définition — Majorant et minorant

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  une partie non vide.

- Un réel  $M$  est un *majorant* de  $A$  si pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$ . On dit alors que  $A$  est *majorée*.
- Un réel  $m$  est un *minorant* de  $A$  si pour tout  $x \in A$ ,  $m \leq x$ . On dit alors que  $A$  est *minorée*.
- $A$  est *bornée* si elle est majorée et minorée.

### Exemple.

- $A = [-2, 3[$  est bornée. 3 est un majorant ;  $-2$  est un minorant.
- $B = ]-\infty, 5]$  est majorée par 5 mais non minorée.
- $C = \mathbb{N}$  est minorée par 0 mais non majorée.

## Encadrement et valeurs approchées

### Encadrement d'un réel

#### Définition — Encadrement

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Encadrer  $x$ , c'est trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq x \leq b$ . L'*amplitude* de cet encadrement est  $b - a$ .

**Exemple.**  $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$  est un encadrement d'amplitude 0,1.  $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$  est un encadrement plus fin, d'amplitude 0,01.

### Valeurs approchées et arrondi

#### Définition — Valeur approchée à $10^{-n}$ près

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Une *valeur approchée par défaut* de  $x$  à  $10^{-n}$  près est un décimal  $a$  tel que :

$$a \leq x \leq a + 10^{-n}.$$

Une *valeur approchée par excès* est  $a + 10^{-n}$ . La *valeur arrondie* est celle des deux qui est la plus proche de  $x$ .

**Exemple.** Pour  $x = \pi \approx 3,141592\dots$  et  $n = 3$  :

- valeur approchée par défaut à  $10^{-3}$  près : 3,141 ;
- valeur approchée par excès à  $10^{-3}$  près : 3,142 ;
- valeur arrondie à  $10^{-3}$  près : 3,142 (plus proche).

## Encadrement d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient

### Théorème — Encadrement d'une somme et d'une différence

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$ . Alors :

1.  $a + c \leq x + y \leq b + d$  (somme).
2.  $a - d \leq x - y \leq b - c$  (différence : on retourne le second encadrement avant d'ajouter).

### Théorème — Encadrement d'un produit (positifs)

Si  $0 \leq a \leq x \leq b$  et  $0 \leq c \leq y \leq d$ , alors :

$$ac \leq xy \leq bd.$$

**Exemple.** Si  $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$  et  $1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$ , alors :  $1,4 \times 1,7 \leq \sqrt{2}\sqrt{3} \leq 1,5 \times 1,8$ , soit  $2,38 \leq \sqrt{6} \leq 2,7$ .

### Théorème — Encadrement de $\sqrt{a}$

Si  $a, b > 0$  et  $a \leq x \leq b$ , alors  $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}$ .

## Erreur absolue, erreur relative

### Définition — Erreurs

Soit  $x$  la valeur exacte et  $a$  une valeur approchée de  $x$ .

- L'erreur absolue est  $|x - a|$ .
- L'erreur relative est  $|x - a|/x$  (si  $x \neq 0$ ), souvent exprimée en pourcentage.

**Exemple.** On prend  $a = 3,14$  comme valeur approchée de  $\pi \approx 3,14159$ .

- Erreur absolue :  $\approx 0,00159$ .
- Erreur relative :  $\approx 0, \frac{00159}{3,14159} \approx 0,000,506$ , soit environ 0,05%.