

# Exercices — L'ordre dans $\mathbb{R}$

## Chapitre 3

### Compatibilité de l'ordre

---

**Exercice 1.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Comparer (en justifiant) :

1.  $-3a$  et  $-3b$  ;
2.  $a + 5$  et  $b + 5$  ;
3.  $a^2$  et  $b^2$  (discuter selon les signes).

**Exercice 2.** Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $x^2 + 1 \geq 2x$ .

*Indication* : étudier le signe de  $x^2 - 2x + 1$ .

**Exercice 3.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Comparer  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Donner un cas d'égalité.

### Encadrements

---

**Exercice 4.** On donne  $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$  et  $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ . Donner un encadrement de :

1.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ;
2.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ;
3.  $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$  ;
4.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ .

**Exercice 5.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $-1 \leq x \leq 4$ . Encadrer :

1.  $2x - 3$  ;
2.  $-x + 7$  ;
3.  $x^2$  (attention au signe!) ;
4.  $\frac{1}{x+5}$ .

**Exercice 6.** Donner un encadrement à  $10^{-2}$  près du périmètre  $P$  et de l'aire  $A$  d'un cercle de rayon  $r = \sqrt{2}$  cm. (On rappelle  $P = 2\pi r$ ,  $A = \pi r^2$ ,  $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$  et  $3,141 \leq \pi \leq 3,142$ .)

### Valeurs approchées et arrondi

---

**Exercice 7.** Donner pour chacun des nombres suivants la valeur approchée par défaut, la valeur approchée par excès et l'arrondi à  $10^{-2}$  près :

$$\frac{5}{3}, \sqrt{7}, \frac{\pi}{4}, \frac{22}{7}.$$

**Exercice 8.** Lors d'une mesure, on a obtenu  $L = 1,73$  m alors que la valeur exacte est  $\sqrt{3}$  m. Calculer l'erreur absolue et l'erreur relative (donner cette dernière en pourcentage à  $10^{-2}$  près).

## Intervalles

---

**Exercice 9.** Représenter sur la droite réelle puis écrire sous forme d'intervalle :

1.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$  ;
2.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$  ;
3.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$ .

**Exercice 10.** Calculer les intersections et réunions suivantes :

1.  $[-3, 2] \cap ]-1, 4[$  ;
2.  $] -\infty, 5[ \cap ]-2, 8[$  ;
3.  $[1, 4[ \cup ]3, 6[$  ;
4.  $] -\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ .

**Exercice 11.** Pour quelle(s) valeur(s) de  $a \in \mathbb{R}$  a-t-on  $[-3, a] \subseteq [-3, 5]$  ?

## Synthèse

---

**Exercice 12.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 5$ . Sachant que  $1,4 \leq x \leq 2,3$ , donner un encadrement de  $f(x)$ .

**Exercice 13.** Démontrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Application : si  $x, y > 0$  et  $xy = 1$ , montrer que  $x + y \geq 2$ .

**Exercice 14.** Une calculatrice affiche  $\sqrt{11} \approx 3,316,624,79$ . Sans calculatrice :

1. Donner un encadrement de  $\sqrt{11}$  entre deux entiers consécutifs.
2. Sachant que  $3,3^2 = 10,89$  et  $3,4^2 = 11,56$ , en déduire un encadrement à  $10^{-1}$  près de  $\sqrt{11}$ .