Corrigés — Les ensembles de nombres

Chapitre 2

Reconnaître les ensembles de nombres

Solution 1.

- $0 \in \mathbb{N}$.
- $-7 \in \mathbb{Z}$ (et pas dans $\mathbb{N}$).
- $3,14 \in \mathbb{D}$ (écriture décimale finie).
- $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$ (rationnel non décimal — son écriture est $3,142857142857...$, périodique).
- $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (irrationnel).
- $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ (irrationnel, car π l'est).

Solution 2.

Plusieurs choix possibles ; voici un exemple par catégorie :

1. $-3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
2. $0,5 = \frac{1}{2} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$.
3. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ (développement décimal infini périodique).
4. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution 3.

Soit $x = 0,\overline{45} = 0,454545....$ Alors : $100x = 45,4545...$, donc $100x - x = 45$, soit $99x = 45$.

D'où $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ (en simplifiant par 9). Ce nombre est bien rationnel, et la fraction $\frac{5}{11}$ est irréductible.

Irrationnels

Solution 4.

Par l'absurde. Supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux et $q \neq 0$. Alors $3q^2 = p^2$, donc $3 \mid p^2$. Comme 3 est premier, ceci entraîne $3 \mid p$. Posons $p = 3k$; alors $3q^2 = 9k^2$, soit $q^2 = 3k^2$, donc $3 \mid q^2$ et donc $3 \mid q$.

Mais alors 3 divise p et q, contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. **Conclusion :** $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution 5.
(a) Si $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors comme $a \in \mathbb{Q}$, on aurait $b\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right) - a \in \mathbb{Q}$. Comme $b \neq 0$ et $b \in \mathbb{Q}$, on aurait $\sqrt{2} = \frac{b\sqrt{2}}{b} \in \mathbb{Q}$, contradiction.

(b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$. Si ce nombre était rationnel, alors $\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) \in \mathbb{Q}$, contradiction.

Puissances et notation scientifique

Solution 6.
$A = \frac{2^4 \times 5^3}{2^2 \times 5} = 2^{4-2} \times 5^{3-1} = 4 \times 25 = 100.$

$B = \frac{(-3)^5 \times 6^2}{2^2 \times 9} = \frac{(-243) \times 36}{4 \times 9} = (-243) \times \frac{36}{36} = -243.$

$C = \frac{10^{-3} \times 10^5}{10^{-2}} = 10^{-3+5-(-2)} = 10^4 = 10,000.$

Solution 7.
Notation scientifique $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$:
- $0,000,074 = 7,4 \times 10^{-5}$.
- $6,250,000 = 6,25 \times 10^6$.
- $0,5 \times 10^{-7} = 5 \times 10^{-8}$.
- $25 \times 10^4 = 2,5 \times 10^5$.

Racines carrées

Solution 8.
- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$.
- $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$.
- $2\sqrt{12} - \sqrt{48} + 5\sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
- $\sqrt{8} \times \sqrt{50} = \sqrt{8 \times 50} = \sqrt{400} = 20$.

Solution 9.
$A = \frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$ (multiplier par $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$).

$B = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$C = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{(1)^2 - 2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{-1} = -\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Solution 10.
Élevons au carré (les deux quantités sont positives) : $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geq a + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2$, car $2\sqrt{ab} \geq 0$.

L'égalité a lieu si et seulement si $\sqrt{ab} = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$.

Valeur absolue

Solution 11.

- $|3-5| = |-2| = 2$.
- $|-7+2| = |-5| = 5$.
- $|\sqrt{2}-1|$: comme $\sqrt{2} > 1$, $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$.
- $|2-\sqrt{5}|$: $\sqrt{5} \approx 2.236 > 2$, donc $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.

Solution 12.

1. $|x-4| = 3 \iff x-4 = \pm 3$, donc $x = 7$ ou $x = 1$. $S = \{1, 7\}$.
2. $|2x+1| = 7 \iff 2x+1 = \pm 7$, donc $x = 3$ ou $x = -4$. $S = \{-4, 3\}$.
3. $|x+2| < 5 \iff -5 < x+2 < 5 \iff -7 < x < 3$. $S =]-7, 3[$.
4. $|3x-1| \geq 4 \iff 3x-1 \leq -4 \quad \text{ou} \quad 3x-1 \geq 4, \quad \text{soit} \quad x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{5}{3}$. $S =]-\infty, -1] \cup [\frac{5}{3}, +\infty[$.

Solution 13.

Sens direct : si $|a| \leq b$, alors par définition $a \leq |a| \leq b$ et $-a \leq |a| \leq b$, soit $a \geq -b$. Donc $-b \leq a \leq b$.

Sens réciproque : si $-b \leq a \leq b$, alors $a \leq b$ et $-a \leq b$, donc $|a| = \max(a, -a) \leq b$.

Solution 14.

(a) $A = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = \left(1+2\sqrt{2}+2\right) + \left(1-2\sqrt{2}+2\right) = 6$.

(b) $A = 6 \in \mathbb{N}$. ✓ (Les termes en $\sqrt{2}$ se compensent.)