Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Les ensembles de nombres

Chapitre 2

Les ensembles usuels de nombres

Avant d'aborder les fonctions, l'analyse et la géométrie analytique, il faut fixer une fois pour toutes l'univers dans lequel on travaille : l'ensemble des nombres réels et ses sous-ensembles importants.

Définition — Les cinq ensembles usuels

- $\mathbb{N}$: ensemble des *entiers naturels*, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- $\mathbb{Z}$: ensemble des *entiers relatifs*, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
- $\mathbb{D}$: ensemble des *nombres décimaux*, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$: ensemble des *nombres rationnels*, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des *nombres réels*.

Propriété — Chaîne d'inclusion

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Les inclusions sont strictes : par exemple $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$, $0,5 \in \mathbb{D}$ mais $0,5 \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (voir section 3).

Exemple. Classer chacun des nombres suivants dans le plus petit ensemble auquel il appartient :

$$7, \quad -4, \quad 0,75, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \pi.$$

- $7 \in \mathbb{N}$ (donc aussi dans $\mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).
- $-4 \in \mathbb{Z}$ (et pas dans $\mathbb{N}$).
- $0,75 = \frac{75}{100} \in \mathbb{D}$ (et pas dans $\mathbb{Z}$).
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ (et pas dans $\mathbb{D}$: sa partie décimale est $0,666...$).
- $\sqrt{5}$ et π sont dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

Nombres décimaux et nombres rationnels

Caractérisation des décimaux

Un nombre x est dans $\mathbb{D}$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme $x = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. De manière équivalente, c'est un rationnel dont le dénominateur (sous forme irréductible) ne contient que des facteurs 2 et 5.

Exemple.
- $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \in \mathbb{D}$: le dénominateur $8 = 2^3$ ne contient que des 2.
- $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} \in \mathbb{D}$: il s'écrit $0,175$.
- $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$: le dénominateur 3 n'est ni 2 ni 5.

Développement décimal d'un rationnel

Théorème — Développement décimal
Tout nombre rationnel admet un développement décimal **fini** (s'il est décimal) ou **infini périodique** (sinon). Réciproquement, tout nombre à développement décimal périodique est un rationnel.

Exemple.
- $\frac{1}{4} = 0,25$ (développement fini, donc $\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$).
- $\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,\overline{3}$ (période 3).
- $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ (période de longueur 6).

Démonstration. Pour le sens direct, en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, les restes possibles sont en nombre fini ($0, 1, ..., q - 1$ si l'on divise par q). Au plus à la q-ième étape, soit le reste devient nul (développement fini), soit un reste se répète et le développement entre en cycle. ■

Nombres irrationnels — l'exemple de $\sqrt{2}$

Définition — Nombre irrationnel
Un nombre réel est dit *irrationnel* s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$, c'est à dire s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Théorème
Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$.

Ainsi p^2 est pair, ce qui entraîne que p est pair (le carré d'un impair est impair). Posons $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $4k^2 = 2q^2$, d'où $q^2 = 2k^2$. Le même raisonnement montre que q est pair.

Mais alors p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit l'hypothèse p et q premiers entre eux. La supposition initiale est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. ■

Exemple. Les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π et le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont irrationnels. La preuve pour $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et plus généralement $\sqrt{n}$ avec n non carré parfait suit le même schéma que celle de $\sqrt{2}$.

Puissances d'exposant entier

Définition — Puissances
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Pour $a = 0$, on définit $0^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; 0^0 n'est pas défini.

Propriété — Règles de calcul
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^*$ et tous $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple. Calculer $A = \frac{(2^3 \times 3^2)^2}{2^4 \times 3^3}$.

$$A = \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^3} = 2^{6-4} \times 3^{4-3} = 4 \times 3 = 12.$$

Notation scientifique

Définition — Notation scientifique
Tout nombre décimal non nul x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = a \times 10^n$$

où $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$. Cette forme s'appelle l'*écriture scientifique* de x.

Exemple.
- La distance Terre-Soleil est environ $149,6$ millions de km $\approx 1,496 \times 10^8$ km.
- La masse d'un électron est environ $9,109 \times 10^{-31}$ kg.

Racine carrée et racine n-ième

Racine carrée d'un réel positif

Définition — Racine carrée
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La *racine carrée* de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

La racine carrée d'un réel strictement négatif **n'existe pas** dans $\mathbb{R}$.

Propriété — Règles de calcul
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $b > 0$ pour le quotient :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt{a}^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| \ (a \in \mathbb{R}).$$

Attention : en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Exemple. Simplifier $A = \sqrt{50} - 3\sqrt{8} + \sqrt{72}$.

$$A = \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{36 \times 2} = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Rationalisation du dénominateur

Pour simplifier l'écriture d'un quotient comportant une racine au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par une expression bien choisie.

Exemple.
- $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (en multipliant haut et bas par $\sqrt{3}$).
- $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

Racine n-ième

Définition — Racine n-ième
Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième* de a l'unique réel positif b tel que $b^n = a$. On note $b = \sqrt[n]{a}$. Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée. Pour $n = 3$, la *racine cubique* $\sqrt[3]{a}$ est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$ (le cube conserve le signe).

Exemple.
- $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.
- $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$.

Valeur absolue d'un réel

Définition — Valeur absolue
Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ représente la distance entre le point d'abscisse x et l'origine sur la droite réelle. Plus généralement, $|x - a|$ représente la distance entre x et a.

Propriété — Propriétés fondamentales
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
1. $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. $|xy| = |x| \times |y|$ et $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ (si $y \neq 0$).
4. $|x|^2 = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. **Inégalité triangulaire** : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration. Démontrons l'inégalité triangulaire. Comme $|x|^2 = x^2$ et $|y|^2 = y^2$, et que $xy \leq |xy| = |x|\,|y|$, on a :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

En passant à la racine carrée (les deux membres sont positifs), on obtient $|x + y| \leq |x| + |y|$. ∎

Résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue

Théorème
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors :
1. $|x - a| = r \iff x = a + r \quad \text{ou} \quad x = a - r$.
2. $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$.
3. $|x - a| \geq r \iff x \leq a - r \quad \text{ou} \quad x \geq a + r$.

Exemple. Résoudre $|x - 3| < 2$.

Par le théorème, cela équivaut à $3 - 2 < x < 3 + 2$, soit $1 < x < 5$. L'ensemble des solutions est l'intervalle ouvert $]1, 5[$.

Exemple. Résoudre $|2x - 1| = 5$.

Cela équivaut à $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5$. D'où $x = 3$ ou $x = -2$.