

Corrigés — Arithmétique dans \mathbb{N}

Chapitre 1

Division euclidienne

Solution 1.

(a) On cherche le plus grand multiple de 7 inférieur ou égal à 125. Comme $7 \times 17 = 119$ et $7 \times 18 = 126 > 125$, on a $q = 17$ et $r = 125 - 119 = 6$. Donc $125 = 7 \times 17 + 6$. Vérification : $0 \leq 6 < 7$. ✓

(b) $25 \times 81 = 2025$ et $25 \times 82 = 2050 > 2026$. Donc $q = 81$ et $r = 2026 - 2025 = 1$. Donc $2026 = 25 \times 81 + 1$.

(c) $101 \times 99 = 9999$ exactement, donc $q = 99$ et $r = 0$. Donc $9999 = 101 \times 99$.

Solution 2.

Diviser un entier n par 5 peut donner les restes $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (par définition $0 \leq r < 5$). Selon le reste, n s'écrit donc :

- $r = 0 : n = 5k$ (multiple de 5),
- $r = 1 : n = 5k + 1$,
- $r = 2 : n = 5k + 2$,
- $r = 3 : n = 5k + 3$,
- $r = 4 : n = 5k + 4$,

avec $k \in \mathbb{N}$. Tout entier naturel se range donc dans exactement l'un de ces cinq groupes — c'est ce qu'on appelle un **raisonnement par disjonction de cas modulo 5**.

Divisibilité

Solution 3.

(a) Parmi deux entiers consécutifs n et $n + 1$, l'un est pair. Le produit $n(n + 1)$ est donc divisible par 2.

(b) On vient de montrer que $n(n + 1)$ est divisible par 2. Il reste à voir que $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 3.

Parmi trois entiers consécutifs $n, n + 1, n + 2$, il y en a exactement un divisible par 3 (les restes mod 3 sont $r, r + 1, r + 2$, qui couvrent $0, 1, 2$). Donc 3 divise $n(n + 1)(n + 2)$.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux et tous deux divisent $n(n + 1)(n + 2)$, leur produit 6 le divise aussi.

Solution 4.

L'idée est d'écrire $n^2 + 5$ comme un multiple de $n + 1$ plus un reste qui ne dépend plus de n .

$n^2 + 5 = (n + 1)(n - 1) + 6$. (Vérification : développer.) Donc $n + 1 \mid n^2 + 5$ équivaut à $n + 1 \mid 6$.

Les diviseurs naturels de 6 sont 1, 2, 3, 6. Donc $n + 1 \in \{1, 2, 3, 6\}$, d'où $n \in \{0, 1, 2, 5\}$.

Solution 5.

Démontrons par disjonction sur n . Posons $u_n = 4^n - 1$.

Méthode directe par récurrence simple (même si la récurrence n'est pas au programme, on peut l'éviter en remarquant) : $4^n - 1 = 4^n - 1 = (4 - 1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 1) = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 1)$, qui est bien un multiple de 3.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \mid 4^n - 1$.

Nombres premiers

Solution 6.

Méthode : tester les diviseurs premiers $p \leq \sqrt{n}$.

- 89 : $\sqrt{89} \approx 9.4$, on teste 2, 3, 5, 7. Aucun ne divise. Donc **89 est premier**.
- 143 : $\sqrt{143} \approx 12$, on teste 2, 3, 5, 7, 11. $143 = 11 \times 13$. Donc **143 n'est pas premier**.
- 211 : $\sqrt{211} \approx 14.5$, on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13. Aucun ne divise. Donc **211 est premier**.
- 323 : $\sqrt{323} \approx 18$. $323 = 17 \times 19$. Donc **323 n'est pas premier**.

Solution 7.

- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
- $1024 = 2^{10}$.
- $2025 = 81 \times 25 = 3^4 \times 5^2$.
- $1547 = 7 \times 13 \times 17$ (en testant : $\frac{1547}{7} = 221 = 13 \times 17$).

PGCD et PPCM

Solution 8.

Algorithme d'Euclide : on remplace (a, b) par (b, r) où r est le reste de la division.

(a) $\text{pgcd}(840, 308)$:

- $840 = 308 \times 2 + 224$
- $308 = 224 \times 1 + 84$
- $224 = 84 \times 2 + 56$
- $84 = 56 \times 1 + 28$

- $56 = 28 \times 2 + 0$. Donc $\text{pgcd} = 28$.

(b) $\text{pgcd}(2024, 506)$:

- $2024 = 506 \times 4 + 0$. Donc $\text{pgcd} = 506$.

(c) $\text{pgcd}(1234, 789)$:

- $1234 = 789 \times 1 + 445$
- $789 = 445 \times 1 + 344$
- $445 = 344 \times 1 + 101$
- $344 = 101 \times 3 + 41$
- $101 = 41 \times 2 + 19$
- $41 = 19 \times 2 + 3$
- $19 = 3 \times 6 + 1$
- $3 = 1 \times 3 + 0$. Donc $\text{pgcd} = 1$.

Solution 9.

Formule : $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$, donc $\text{ppcm} = \frac{ab}{\text{pgcd}}$.

(a) $\text{ppcm}(840, 308) = \frac{840 \times 308}{28} = 9240$.

(b) $\text{ppcm}(2024, 506) = \frac{2024 \times 506}{506} = 2024$.

(c) $\text{ppcm}(1234, 789) = \frac{1234 \times 789}{1} = 973\,626$.

Nombres premiers entre eux

Solution 10.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $25 = 5^2$. Aucun facteur premier en commun, donc $\text{pgcd}(84, 25) = 1$. Les deux nombres sont premiers entre eux.

Vérification par Euclide : $84 = 25 \times 3 + 9$; $25 = 9 \times 2 + 7$; $9 = 7 \times 1 + 2$; $7 = 2 \times 3 + 1$; $2 = 1 \times 2 + 0$. $\text{PGCD} = 1$. ✓

Solution 11.

Soit $d = \text{pgcd}(n, n + 1)$. Alors d divise n et d divise $n + 1$, donc d divise $(n + 1) - n = 1$. Donc $d = 1$, ce qui signifie que n et $n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution 12.

Si $\text{pgcd}(a, b) = 6$, on peut écrire $a = 6a'$ et $b = 6b'$ avec $\text{pgcd}(a', b') = 1$.

Alors $\text{ppcm}(a, b) = 6a'b'$ (car $a'b'$ et 6 ont en commun seulement les facteurs imposés par a ou b — en fait, plus simplement, on utilise $\text{pgcd} \times \text{ppcm} = ab$).

D'où $6 \times 360 = ab = 36a'b'$, soit $a'b' = 60$.

On cherche les couples (a', b') avec $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $a'b' = 60$. Les décompositions de $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ en deux facteurs premiers entre eux donnent (à l'ordre près) : $(1, 60), (3, 20), (4, 15), (5, 12)$.

Soit, en multipliant par 6 pour retrouver (a, b) : $(6, 360), (18, 120), (24, 90), (30, 72)$ et leurs permutations.