Exercices — Arithmétique dans NN

Chapitre 1

Division euclidienne

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de : (a) $a = 125$ par $b = 7$; (b) $a = 2026$ par $b = 25$; (c) $a = 9999$ par $b = 101$. Vérifier dans chaque cas l'égalité $a = bq + r$ et l'encadrement $0 \leq r < b$.

Exercice 2. On considère la division euclidienne d'un entier n par 5. Quels sont les restes possibles ? Donner, dans chaque cas, la forme générale de n.

Divisibilité

Exercice 3. Soit n un entier naturel. Montrer que : (a) $n(n+1)$ est divisible par 2 ; (b) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Exercice 4. Trouver tous les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 5$.

Exercice 5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $4^n - 1$ est divisible par 3.

Nombres premiers

Exercice 6. Tester si les nombres suivants sont premiers, en justifiant par la méthode de la racine carrée : 89, 143, 211, 323.

Exercice 7. Décomposer en facteurs premiers : 360, 1024, 2025, 1547.

PGCD et PPCM

Exercice 8. Calculer par l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(840, 308)$, $\text{pgcd}(2024, 506)$, $\text{pgcd}(1234, 789)$.

Exercice 9. Pour chacun des couples ci-dessus, calculer ensuite le PPCM en utilisant la formule $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = a \times b$.

Nombres premiers entre eux

Exercice 10. On pose $a = 84$ et $b = 25$. Montrer que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les entiers n et $n+1$ sont toujours premiers entre eux.

Exercice 12. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(a, b) = 6$ et $\text{ppcm}(a, b) = 360$.