Corrigés — Nombres complexes

Chapitre 10

Solution 1.
1. $3 + 2i$.
2. $(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$.
3. $\frac{2+3i}{1-i} = (2+3i)\frac{1+i}{2} = \frac{2+2i+3i-3}{2} = \frac{-1+5i}{2}$.
4. $\overline{z_1} = 2 - 3i$, $|z_1| = \sqrt{13}$.

Solution 2.
1. $z^2 = -4$, $z = \pm 2i$.
2. $\Delta = 4 - 20 = -16$. $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.
3. $\Delta = 1 - 4 = -3$. $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Solution 3.
1. $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.
2. $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$.
3. $\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - 4\frac{i}{25}$.
4. $(2+i)\frac{1+i}{2} = \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{1+3i}{2}$.

Solution 4.
$M_1 = (2,1)$, $M_2 = (-1,3)$, $M_3 = (2,-1)$ (symétrique de M_1 par rapport à (Ox)), $M_4 = (-2,-1)$ (symétrique de M_1 par rapport à O).

Solution 5.
Soient $z = a + bi, z' = a' + b'i$. $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$, donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$. D'autre part $\bar{z}\overline{z'} = (a - bi)(a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$. Égalité.

Solution 6.
$z^2 = 2i$, $z^3 = z \times z^2 = (1+i)(2i) = 2i - 2 = -2 + 2i$, $z^4 = \left(z^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$. On remarque que les puissances tournent dans le plan : chaque multiplication par z tourne de $\frac{\pi}{4}$ et multiplie le module par $\sqrt{2}$.