Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Nombres complexes (introduction)

Chapitre 10

Forme algébrique

Définition
On admet l'existence d'un nombre i vérifiant $i^2 = -1$. Un **nombre complexe** s'écrit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a = \mathrm{Re}(z)$: **partie réelle** ;
- $b = \mathrm{Im}(z)$: **partie imaginaire**.

L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$.

Opérations

Pour $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$:

- $z + z' = (a + a') + (b + b')i$;
- $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

Définition
Le **conjugué** de $z = a + bi$ est $\overline{z} = a - bi$. Le **module** de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a $z\overline{z} = |z|^2$.

Propriété

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
2. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$;
4. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Inverse d'un complexe

Pour $z \neq 0$: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|}z|^2$.

Exemple. $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$.

Plan complexe

Définition
Le **plan complexe** identifie $z = a + bi$ au point $M(a, b)$. On dit que z est l'**affixe** de M.
- $|z|$ est la distance OM ;
- $\overline{z}$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Équations du second degré à coefficients réels

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple. $x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = -3$, solutions $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.