Équations différentielles

Chapitre 8

Équation $y' = ay$

Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'(x) = ay(x)$ sont exactement les fonctions :

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Si $y(x) = Ce^{ax}$, alors $y'(x) = aCe^{ax} = ay(x)$. Réciproquement, soit $z(x) = y(x)e^{-ax}$. $z'(x) = (y' - ay)e^{-ax} = 0$, donc z est constante, d'où $y(x) = Ce^{ax}$. ∎

Exemple. $y' = 3y$ avec $y(0) = 2$: $y(x) = 2e^{3x}$.

Équation $y' = ay + b$ (affine)

Théorème
Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de $y' = ay + b$ sont :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La fonction constante $y_p = -\frac{b}{a}$ est solution particulière. Toute solution s'écrit $y = y_p + y_h$ où y_h résout $y' = ay$ (homogène associée). D'où la forme. ∎

Exemple. $y' = -2y + 6$, $y(0) = 1$. Solutions $y = Ce^{-2x} + 3$. $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$. $y(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Équation harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème
Pour $\omega > 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont :

$$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Équivalemment : $y(x) = R\cos(\omega x - \varphi)$ avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Cette équation régit les oscillations harmoniques (ressort, pendule simple).

Exemple. $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Solutions $y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. $y(0) = A = 1$, $y'(0) = 2B = 0$, donc $B = 0$. $y(x) = \cos(2x)$.

Problèmes à conditions initiales

Ces équations apparaissent naturellement quand on modélise :

- *Refroidissement* : $T'(t) = k(T(t) - T_{\text{ext}})$ (loi de Newton).
- *Désintégration radioactive* : $N'(t) = -\lambda N(t)$.
- *Croissance de population* (modèle exponentiel) : $P'(t) = rP(t)$.

Chaque situation physique fournit des conditions initiales qui déterminent la constante d'intégration.

Exemple. Modèle de refroidissement. Une tasse de café à 80°C refroidit dans une pièce à 20°C. On suppose $T' = -0\{,\}1(T - 20)$. À $t = 0$, $T = 80$. Solutions : $T(t) = Ce^{-0\{,\}1t} + 20$, $T(0) = C + 20 = 80$, $C = 60$. $T(t) = 60e^{-0\{,\}1t} + 20$. Après $t = 10$ min : $T = 60e^{-1} + 20 \approx 42$°C.

Liens avec les primitives

Résoudre $y' = f(x)$ (équation sans y au second membre) revient à trouver une primitive de f. C'est le cas le plus simple : $y(x) = F(x) + C$.