Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Fonctions logarithmiques

Chapitre 5

Fonction $\ln$

Définition
$\ln$ est la primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui vaut 0 en 1. Elle est strictement croissante, avec $\ln(e) = 1$.

Propriété — Propriétés algébriques
Pour $x, y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:
1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Limites

- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- Croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Dérivée

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Plus généralement, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ si $u > 0$.

Exemple. $f(x) = \ln(1 + x^2)$: $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Logarithme décimal

$\log x = \ln \frac{x}{\ln} 10$. Utile pour les échelles logarithmiques (pH, Richter, décibels).

Applications biologiques

En biologie, une population qui croît **exponentiellement** satisfait $P(t) = P_0 e^{rt}$. Pour trouver t tel que $P(t) = k$, on passe au logarithme : $t = \frac{\ln\left(\frac{k}{P_0}\right)}{r}$.

Exemple. Une culture bactérienne double toutes les heures : $P(t) = P_0 \times 2^t$. Quand la population atteint-elle $1000P_0$? $2^t = 1000$, donc $t = \ln \frac{1000}{\ln} 2 \approx 9\{,\}97$ heures.