

Dérivation et étude des fonctions

Chapitre 2

Dérivabilité

Définition

f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. La limite est $f'(a)$.

Propriété — Conséquence

Si f dérivable en a , alors f est continue en a . La réciproque est fautive (ex. $f(x) = |x|$ en 0 : continue, non dérivable).

Théorèmes fondamentaux

Théorème — Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème — Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Propriété — Conséquences pratiques

1. Si $f'(x) \geq 0$ sur I , f est croissante.
2. Si $f'(x) = 0$ sur I (intervalle), f est constante.
3. Si $|f'(x)| \leq M$ sur I , $|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$ (inégalité des accroissements finis — utile pour majorer).

Dérivabilité à gauche et à droite

Définition

Les dérivées à gauche et à droite :

$$f'_{g(a)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_{d(a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

f dérivable en a ssi $f'_{g(a)} = f'_{d(a)}$ et égal à la dérivée.

Exemple. $f(x) = |x|$ en 0 : $f'_{g(0)} = -1$, $f'_{d(0)} = 1$. Non dérivable ; point anguleux.

Dérivée d'une fonction composée (rappel)

$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$. Cas particuliers : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$.

Étude complète d'une fonction

Plan (rappel 1BAC SE) :

1. Domaine.
2. Parité, périodicité.
3. Limites aux bornes.
4. Asymptotes.
5. Dérivée, signe, tableau de variations.
6. Extrema.
7. Points particuliers, tangentes.
8. Tracé.

En 2e Bac on ajoute :

- Étude de la *concavité* via la dérivée seconde f'' .
- Détection des *points d'inflexion* (où f'' change de signe).
- *Branches infinies* plus raffinées.

Branches paraboliques

Quand $f(x) \rightarrow \pm\infty$ en $\pm\infty$:

- Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow b$ finie : asymptote oblique $y = ax + b$.
- Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ mais $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$: branche parabolique de direction $y = ax$.
- Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: branche parabolique verticale.
- Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique horizontale.

Exemple. $f(x) = x + \sqrt{x}$ en $+\infty$. $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$. $f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$. Donc **branche parabolique de direction $y = x$** (la courbe monte « au-dessus » de la droite $y = x$).

Optimisation (problèmes de maximum/minimum)

Les extrema s'obtiennent :

- en annulant la dérivée dans l'intérieur d'un intervalle ;
- aux bornes de l'intervalle (si fermé) ;
- en des points où la fonction n'est pas dérivable.

Exemple. On veut construire un rectangle de périmètre P d'aire maximale. Posons côtés x et $(\frac{P}{2} - x)$. Aire $S(x) = x(\frac{P}{2} - x)$ sur $[0, \frac{P}{2}]$. $S'(x) = \frac{P}{2} - 2x$, annule en $x = \frac{P}{4}$. S max en $x = \frac{P}{4}$ (carré). Aire max = $\frac{P^2}{16}$.