

# Exercices — Limites et continuité

## Chapitre 1

**Exercice 1.** Calculer :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 1}$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ .

**Exercice 2.** Par gendarmes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + 2x}{3x + 1}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ .

**Exercice 3.** Étudier la continuité en 0 de :

1.  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  pour  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$  ;
2.  $f(x) = x + |x|$  ;
3.  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pour  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ .

**Exercice 4.** Démontrer que  $f(x) = x^3 + 2x - 5$  admet une unique racine dans  $[1, 2]$ . Donner un encadrement à  $10^{-1}$  près (dichotomie, quelques étapes).

**Exercice 5.** Appliquer le TVI : démontrer que l'équation  $\cos x = x$  admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.** Soit  $f(x) = x^2 - 2$  sur  $[0, 2]$ . Déterminer  $f([0, 2])$  et vérifier qu'il s'agit bien d'un segment.

**Exercice 7.** Prolonger par continuité (si possible) en 0 :

1.  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$  ;
2.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$  ;
3.  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . Démontrer qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$  (point fixe).

*Indication :* appliquer le TVI à  $g(x) = f(x) - x$ .

**Exercice 9.** Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  où  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$  après simplification.

**Exercice 10.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée.