

Espaces vectoriels

Chapitre 11

Définition

Définition

Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E muni :

- d'une addition $+: E \times E \rightarrow E$ faisant de $(E, +)$ un groupe abélien ;
- d'une multiplication externe $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, vérifiant :
 1. $1x = x$;
 2. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;
 3. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
 4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de $\mathbb{R}$ *scalaires*.

Exemple.

- $\mathbb{R}^n$ avec les opérations coordonnées par coordonnées.
- Vecteurs du plan, de l'espace.
- Ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ (espace de dimension infinie).
- Ensemble des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition

Une partie $F \subseteq E$ est un *sous-espace vectoriel* si :

1. F contient le vecteur nul ;
2. F stable par $+: \forall x, y \in F, x + y \in F$;
3. F stable par multiplication externe : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in F, \lambda x \in F$.

Théorème — Caractérisation

F est un sous-espace vectoriel ssi $F \neq \emptyset$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F$.

Combinaison linéaire

Définition

Une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Définition

L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est noté $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$: c'est un sous-espace vectoriel (le plus petit contenant les $\vec{u}_i$).

Famille libre, liée, génératrice

Définition

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de E .

- *Libre* : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
- *Liée* : non libre (il existe une combinaison non triviale nulle).
- *Génératrice* de E : $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = E$.

Base et dimension

Définition

Une *base* de E est une famille à la fois libre et génératrice.

Théorème

Si E admet une base finie, toutes ses bases ont le même nombre d'éléments ; c'est la *dimension* de E , notée $\dim E$.

Exemple.

- $\dim \mathbb{R}^n = n$; base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (plan vectoriel).
- $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (espace vectoriel).
- Sous-espace formé d'une droite passant par 0 : dimension 1.
- Sous-espace formé d'un plan passant par 0 : dimension 2.

Applications linéaires (introduction)

Définition

Une *application linéaire* $f : E \rightarrow F$ vérifie :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Propriété

L'ensemble $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace de E . $\text{Im}(f) = f(E)$ est un sous-espace de F . **Théorème du rang** : $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ (dimension finie).