Exercices — Espaces vectoriels

Chapitre 11

Exercice 1. Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$:
1. $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$;
2. $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$;
3. $H = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$;
4. $K = \{(x, y, z) \mid x = 2y, z = -y\}$.

Exercice 2. La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est-elle libre ?
1. $\vec{u_1}(1, 0, 0), \vec{u_2}(0, 1, 0), \vec{u_3}(1, 1, 0)$.
2. $\vec{u_1}(1, 2, 3), \vec{u_2}(4, 5, 6), \vec{u_3}(7, 8, 9)$.
3. $\vec{u_1}(1, 1, 0), \vec{u_2}(0, 1, 1), \vec{u_3}(1, 0, 1)$.

Exercice 3. Déterminer une base et la dimension du sous-espace $F = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Déterminer si la famille $(1, X, X^2)$ est une base de l'espace des polynômes de degré ≤ 2 (qu'on note $\mathbb{R}_2[X]$). Quelle est sa dimension ?

Exercice 5. Démontrer qu'une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.

Exercice 6. Démontrer qu'une famille libre extraite d'une famille donnée reste libre.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.
1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
4. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 8. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exercice 9. La réunion de deux sous-espaces est-elle un sous-espace ? (Donner un contre-exemple simple dans $\mathbb{R}^2$.)