Corrigés — Structures algébriques

Chapitre 10

Solution 1.

1. $(\mathbb{N}, +)$: associative, commutative, neutre 0. Pas d'inverses ($-1 \notin \mathbb{N}$). **Monoïde, pas groupe.**
2. $(\mathbb{Z}, \times)$: associative, commutative, neutre 1. Inverses seulement pour ± 1. **Monoïde.**
3. $(\mathbb{Z}^*, \times)$: associative, commutative. Pas de neutre... $1 \in \mathbb{Z}^*$ donc neutre 1. Inverse de n : $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}^*$ sauf si $n = \pm 1$. Pas groupe.
4. $(\mathbb{R}, *)$: $x * y = x + y + xy$. Commutative. Associative (vérifier). Neutre e : $x + e + xe = x \iff e(1 + x) = 0$. Si on veut e fixe indep. de x : $e = 0$ (avec $0 + 0 + 0 = 0$, oui). Inverse : $x' + x + xx' = 0$, $x'(1 + x) = -x$, $x' = -\frac{x}{1+x}$ pour $x \neq -1$. **Groupe sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.**

Solution 2.

$(-1) \times (-1) = 1, 1 \times 1 = 1$. Loi interne. Associative, commutative, neutre 1, inverse = soi-même. **Groupe.**

Solution 3.

$(\mathbb{Z}, +)$: classique. $2\mathbb{Z}$: contient 0, stable par $+$ (somme de pairs = pair), stable par $-$ ($-$ d'un pair = pair). **Sous-groupe.**

Solution 4.

Composition associative (vraie pour toute application). Rotation de centre Ω et angle 0 = identité (neutre). Inverse de $R_{\Omega,\theta}$: $R_{\Omega,-\theta}$. Loi de composition : $R_{\Omega,\theta_2} \circ R_{\Omega,\theta_1} = R_{\Omega,\theta_1+\theta_2}$. Interne et commutative. **Groupe abélien.**

Solution 5.

$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$. Morphisme. Injective : $e^x = e^y \Rightarrow x = y$ (log). Surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$: non — $e^x > 0$, donc image $= \mathbb{R}_+^*$, pas $\mathbb{R}^*$. Donc non surjectif vers $\mathbb{R}^*$, mais oui vers $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 6.

$f(AB) = \det(AB) = \det A \times \det B = f(A) \times f(B)$. Morphisme.

Solution 7.

Unicité du neutre : supposons e, e' neutres. $e * e' = e$ (car e' neutre) et $e * e' = e'$ (car e neutre). Donc $e = e'$. **Unicité du symétrique :** supposons x', x'' symétriques de x. $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$.

Solution 8.
$(a*b)*\left(b^{-1}*a^{-1}\right)=a*\left(b*b^{-1}\right)*a^{-1}=a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e$. Par unicité du symétrique, $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

Solution 9.
***n* premier ⇒ corps :** tout $a\neq 0 \bmod n$ vérifie $\mathrm{PGCD}(a,n)=1$, Bézout donne $au+nv=1$, soit $au\equiv 1 \bmod n$. L'inverse existe. ***n* composé ⇒ pas corps :** $n=ab$ avec $1<a,b<n$. Alors $ab\equiv 0 \bmod n$, donc a divise zéro — n'est pas inversible (diviseur de zéro).