

# Exercices — Structures algébriques

## Chapitre 10

**Exercice 1.** Pour chaque ensemble et loi, vérifier les propriétés (associativité, commutativité, neutre, inverses) :

1.  $(\mathbb{N}, +)$  ;
2.  $(\mathbb{Z}, \times)$  ;
3.  $(\mathbb{Z}^*, \times)$  ;
4.  $(\mathbb{R}, *)$  avec  $x * y = x + y + xy$ .

**Exercice 2.** Démontrer que  $(\{-1, 1\}, \times)$  est un groupe.

**Exercice 3.** Démontrer que  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe et que  $2\mathbb{Z}$  en est un sous-groupe.

**Exercice 4.** Démontrer que l'ensemble des rotations du plan de même centre forme un groupe (avec la composition).

**Exercice 5.** Soit  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$  défini par  $f(x) = e^x$ . Démontrer que  $f$  est un morphisme. Est-il injectif ? Surjectif ?

**Exercice 6.** Soit  $f$  défini sur le groupe des matrices  $2 \times 2$  inversibles (avec la multiplication) vers  $(\mathbb{R}^*, \times)$  par  $f(A) = \det(A)$ . Démontrer que  $f$  est un morphisme. (On admettra  $\det(AB) = \det A \times \det B$ .)

**Exercice 7.** Soit  $G$  un groupe. Démontrer que l'élément neutre est unique et que tout élément a un unique symétrique.

**Exercice 8.** Dans un groupe  $(G, *)$ , démontrer que pour tous  $a, b \in G$  :  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

**Exercice 9.** Démontrer que  $(\frac{\mathbb{Z}}{n}\mathbb{Z}, +, \times)$  (les entiers modulo  $n$ ) est un corps ssi  $n$  est premier.