

Exercices — Arithmétique dans \mathbb{Z}

Chapitre 9

Exercice 1. Trouver Bézout pour :

1. PGCD(21, 15) ;
2. PGCD(54, 24).

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 :

1. $7x + 4y = 1$;
2. $15x + 10y = 20$;
3. $3x + 5y = 7$.

Exercice 3. Calculer modulo 11 : $2^{\{10\}}$, $3^{\{11\}}$, $5^{\{20\}}$. (Petit théorème de Fermat.)

Exercice 4. Résoudre $4x \equiv 7 \pmod{13}$.

Exercice 5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $6 \mid (n^3 - n)$.

Exercice 6. Démontrer le petit théorème de Fermat par récurrence sur a (cas $p = 5$, par exemple).

Exercice 7. Déterminer le reste de la division de $2^{\{100\}}$ par 7.

Exercice 8. Soient a, b des entiers tels que $13a + 17b = 1$. Trouver un couple (a, b) . Puis en déduire une solution particulière de $13x + 17y = 5$.

Exercice 9. Démontrer que si n est impair, alors $24 \mid (n^2 - 1)$ (déjà fait en partie pour 8 ; ajouter le facteur 3).