

# Corrigés — Nombres complexes (partie 1)

## Chapitre 8

### Solution 1.

- $z_1 + z_2 = 1 + 7i$ .
- $z_1 z_2 = (2 + 3i)(-1 + 4i) = -2 + 8i - 3i + 12i^2 = -14 + 5i$ .
- $\frac{z_1}{z_2} = (2 + 3i) \frac{-1-4i}{(-1+4i)(-1-4i)} = (2 + 3i) \frac{-1-4i}{17} = \frac{-2-8i-3i+12}{17} = \frac{10-11i}{17}$ .
- $|z_1| = \sqrt{13}, |z_2| = \sqrt{17}$ .

### Solution 2.

- $(1 + i)^2 = 2i$ .
- $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ .
- $(2 - i)(2 + i) = 5$ .
- $\frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{13}$ .

### Solution 3.

$z = 1 + 2i$ .  $z^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ .  $z^3 = z z^2 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -3 + 4i - 6i - 8 = -11 - 2i$ .  $z \bar{z} = 1 + 4 = 5$ .  $z + \bar{z} = 2$ .  $z - \bar{z} = 4i$ .

### Solution 4.

- $z^2 = -4 \iff z = \pm 2i$ .
- $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .
- $\Delta = 4 - 20 = -16$ .  $z = 1 \pm 2i$ .
- $\Delta = 9 - 40 = -31$ .  $z = \frac{-3 \pm i\sqrt{31}}{4}$ .

### Solution 5.

- Cercle de centre  $A(1)$  et rayon 3.
- Médiatrice de  $[-i, i]$  : axe réel  $\Im(z) = 0$ .
- Droite verticale  $x = 2$ .
- Demi-plan supérieur (axe réel inclus).

### Solution 6.

- Développer :  $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$ . De même pour  $|z - z'|^2 = z\bar{z} - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}'$ . Somme :  $2|z|^2 + 2|z'|^2$ .
- $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ .  $z = \bar{z} \iff iy = -iy \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$ .

**Solution 7.**

Coefficients :  $u + v = -1$ ,  $uv = 1$ .  $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = 1 - 2 = -1$ .  $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2) = 1 \times (-1) = -1$ .

**Solution 8.**

$z = 1$  ou  $z^2 + z + 1 = 0$ , soit  $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . Trois solutions :  $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ .

**Solution 9.**

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = 2\frac{i}{2} = i$ . Donc  $z = i$ ,  $|z| = 1$ .

**Solution 10.**

$z^4 = 1$ . Racines :  $\pm 1$  et  $\pm i$  (quatre racines quatrièmes de l'unité). Vérif :  $1^4 = 1$ ,  $(-1)^4 = 1$ ,  $i^4 = 1$ ,  $(-i)^4 = 1$ .