Fonctions logarithmiques

Chapitre 4

Logarithme népérien

Définition
La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$ comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad \ln(1) = 0.$$

Le nombre $e = \exp(1) \approx 2\{,\}718$ est l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$.

Propriétés algébriques fondamentales

Théorème
Pour tous $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:
- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (fondamentale)
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \times \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \left(\frac{1}{2}\right) \ln a$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

Dérivée et variations

Propriété
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.
- ln est strictement croissante ; $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- Pour une fonction $u > 0$ dérivable : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Propriété — Limites remarquables
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée).
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour $n > 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Équations et inéquations

Propriété
Pour $a, b > 0$:
- $\ln a = \ln b \iff a = b$.
- $\ln a = c \iff a = e^c$.
- $\ln a > \ln b \iff a > b$ (croissance stricte).

Exemple. Résoudre $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$. Conditions : $x^2 > 4$ ET $x > 0$, soit $x > 2$. L'équation devient $x^2 - 4 = 3x$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, racines $x = 4$ ou $x = -1$. Seul $x = 4$ vérifie $x > 2$.

Exemple. Résoudre $\ln(x) \leq 2$. $x > 0$ et $x \leq e^2$. Donc $x \in]0, e^2]$.

Étude de fonctions avec ln

Méthode type :
- Déterminer le domaine (exiger argument > 0).
- Limites aux bornes (attention aux formes indéterminées, utiliser les croissances comparées).
- Dérivée $f' = \left(\frac{u'}{u}\right) \times g'(\ln u)$ ou similaire.
- Tableau de variations.

Exemple. $f(x) = x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
- $D =]0, +\infty[$.
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. $\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$.
- $f'(x) = \ln x + 1$. Zéro en $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Signe $-$ avant, $+$ après.
- Minimum $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ en $x = \frac{1}{e}$.

Logarithme décimal

Définition
Le *logarithme décimal* est $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour $x > 0$. Il vérifie les mêmes propriétés algébriques que ln, avec $\log(10) = 1$, $\log(10^n) = n$.

Usage : ordres de grandeur, échelle logarithmique (pH, décibels, Richter).