Exercices — Suites numériques

Chapitre 3

Exercice 1. Calculer la limite :
1. $u_n = \frac{3n^2-1}{n^2+2}$;
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
3. $u_n = \frac{n-1}{n^2}$;
4. $u_n = \frac{2^n+3^n}{3^n}$.

Exercice 2. Par gendarmes :
1. $u_n = \frac{\cos(n^2)}{n}$;
2. $u_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 3. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$. Calculer u_n explicitement (suite géométrique) et sa limite.

Exercice 4. u_n = somme des inverses des carrés jusqu'à n : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que (u_n) est croissante et majorée (par 2, en admettant l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$). Conclure sur la convergence.

Exercice 5. Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2}$.
1. Démontrer que $u_n = 3$ pour tout n (constante).

Exercice 6. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2}$.
1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que $1 \leq u_n \leq 3$ et que (u_n) est croissante.
3. Conclure sur la convergence et déterminer la limite.

Exercice 7. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
1. Encadrement : montrer $0 < u_n \leq 2$.
2. Étudier la monotonie.
3. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 8. Soient $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Vérifier que (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; donner leur limite commune.

Exercice 9. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ en admettant que la limite vaut $e \approx 2\{,\}718$ (définition). On ne demande pas la démonstration ; on admet.

Exercice 10. Démontrer par l'absurde que la suite $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite dans $\mathbb{R}$.

Indication : si $u_n \to \ell$, utiliser la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$.