Probabilités

Chapitre 12

Dénombrement (rappels)

On rappelle pour un ensemble fini de cardinal n :
- Nombre de permutations : $n!$.
- Nombre d'arrangements de p éléments parmi n : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
- Nombre de combinaisons de p éléments parmi n : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriété — Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Univers, événements, probabilité

Définition
On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont l'issue dépend du hasard. L'ensemble des issues possibles est l'**univers** Ω. Un **événement** est une partie de Ω.

Deux événements A, B sont :
- **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$;
- **contraires** si $B = \Omega \setminus A$ (noté $\overline{A}$).

Définition
Une **probabilité** sur un univers fini Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
1. $P(\Omega) = 1$;
2. pour A, B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Propriété — Propriétés
1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Propriété — Équiprobabilité
Si toutes les issues de Ω sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}.$$

Probabilité conditionnelle

Définition
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est :

$$P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On en déduit la **formule des probabilités composées** :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A).$$

Théorème — Formule des probabilités totales
Si $B_1, \dots, B_n$ forment une partition de Ω (deux à deux incompatibles et d'union Ω) avec chaque $P(B_i) > 0$, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P(A \mid B_i).$$

Théorème — Formule de Bayes
Sous les mêmes hypothèses, pour $P(A) \neq 0$:

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

Indépendance

Définition
Deux événements A, B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

De façon équivalente (si $P(B) \neq 0$) : $P(A \mid B) = P(A)$.

Propriété
Si A et B sont indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$, pour $\overline{A}$ et B, pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Variable aléatoire

Définition
Une **variable aléatoire réelle** (VA) sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Son **support** est $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. La **loi de X** est la donnée des $p_i = P(X = x_i)$.

Définition — Espérance, variance
Pour une VA X de support $\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), \quad V(X) = E((X - E(X))^2).$$

L'**écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété
1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Loi binomiale

Définition
Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ est une expérience à deux issues : **succès** (proba p) et **échec** (proba $1 - p$). Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves indépendantes.

Définition
Soit X le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (n, p). Alors X suit une **loi binomiale** notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, avec :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Propriété
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:
1. $E(X) = np$;
2. $V(X) = np(1 - p)$;
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Exemple. On lance une pièce équilibrée 10 fois. Soit X le nombre de piles. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$, $E(X) = 5$, $V(X) = 2\{,\}5$. $P(X = 7) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024} \approx 0\{,\}117$.