Corrigés — Espaces vectoriels

Chapitre 11

Solution 1.
1. **F :** $(0,0,0) \in F$. Stable par $+$ et scal. **Sous-espace.**
2. **G :** ne contient pas $(0,0,0)$. **Pas sous-espace.**
3. **H :** $(1,0,0) \in H$ et $(0,1,0) \in H$, somme $(1,1,0)$ avec $xy = 1 \neq 0$. **Pas stable.**
4. **K :** $(0,0,0) \in K$. Si $(x,y,z),(x',y',z') \in K$, somme vérifie $(x+x') = 2(y+y'), (z+z') = -(y+y')$. ✓ **Sous-espace.**

Solution 2.
1. $\vec{u_3} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$. **Liée.**
2. Déterminant : $1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8 = 45+84+96-105-72-48 = 0$. **Liée.**
3. Déterminant : $1(1-0)-1(0-1)+0 = 1+1 = 2 \neq 0$. **Libre.**

Solution 3.
$x+2y-z=0$. Paramétrer avec $y=s, z=t : x=-2s+t$. Vecteur générique : $(-2s+t,s,t) = s(-2,1,0)+t(1,0,1)$. Base : $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$. Dimension 2.

Solution 4.
Libre : $\lambda_0+\lambda_1X+\lambda_2X^2=0$ pour tout X implique $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$ (polynôme nul). Génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ par définition. **Base. Dimension 3.**

Solution 5.
Si $\vec{0}$ est dans la famille, alors $1\times\vec{0}+0\times\vec{u_2}+\ldots=\vec{0}$ est une combinaison non triviale nulle. **Liée.**

Solution 6.
Soit $(\vec{u_1},\ldots,\vec{u_k})$ libre et une sous-famille $\left(\overrightarrow{u_{i_1}},\ldots,\overrightarrow{u_{i_j}}\right)$. Si $\lambda_1\overrightarrow{u_{i_1}}+\ldots+\lambda_j\overrightarrow{u_{i_j}}=\vec{0}$, c'est une combinaison de la famille complète (avec les autres coefficients nuls). Par liberté, tous $\lambda=0$.

Solution 7.
1. $f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = (x_1+x_2+y_1+y_2, y_1+y_2-z_1-z_2) = f(\vec{u_1})+f(\vec{u_2})$. Idem scal.
2. Noyau : $x+y=0, y-z=0$. Donc $y=z, x=-y$. Paramétrer : $y=t$, $(-t,t,t)=t(-1,1,1)$. **Dim Ker = 1.**

3. Image : f va de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$. f surjective ? $f(1,0,0) = (1,0)$ et $f(0,0,-1) = (0,1)$. Oui, Im $= \mathbb{R}^2$.
4. $3 = 1 + 2$. ✓

Solution 8.
Soient F, G sous-espaces. $F \cap G$ contient $\vec{0}$. Stable par $+$: si $x, y \in F \cap G$, alors $x + y \in F$ (par stabilité de F) et in G. Idem scalaire.

Solution 9.
Contre-exemple : $F =$ axe (Ox), $G =$ axe (Oy). $F \cup G$ contient $(1,0)$ et $(0,1)$ mais pas leur somme $(1,1)$ (qui n'est ni dans F ni dans G). Pas sous-espace.