

# Corrigés — Structures algébriques

## Chapitre 10

### Solution 1.

1.  $(\mathbb{N}, +)$  : associative, commutative, neutre 0. Pas d'inverses ( $-1 \notin \mathbb{N}$ ). **Monoïde, pas groupe.**
2.  $(\mathbb{Z}, \times)$  : associative, commutative, neutre 1. Inverses seulement pour  $\pm 1$ . **Monoïde.**
3.  $(\mathbb{Z}^*, \times)$  : associative, commutative. Pas de neutre...  $1 \in \mathbb{Z}^*$  donc neutre 1. Inverse de  $n : \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}^*$  sauf si  $n = \pm 1$ . Pas groupe.
4.  $(\mathbb{R}, *)$  :  $x * y = x + y + xy$ . Commutative. Associative (vérifier). Neutre  $e : x + e + xe = x \iff e(1+x) = 0$ . Si on veut  $e$  fixe indep. de  $x : e = 0$  (avec  $0 + 0 + 0 = 0$ , oui). Inverse :  $x' + x + xx' = 0$ ,  $x'(1+x) = -x$ ,  $x' = -\frac{x}{1+x}$  pour  $x \neq -1$ . **Groupe sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .**

### Solution 2.

$(-1) \times (-1) = 1, 1 \times 1 = 1$ . Loi interne. Associative, commutative, neutre 1, inverse = soi-même. **Groupe.**

### Solution 3.

$(\mathbb{Z}, +)$  : classique.  $2\mathbb{Z}$  : contient 0, stable par + (somme de pairs = pair), stable par - (- d'un pair = pair). **Sous-groupe.**

### Solution 4.

Composition associative (vraie pour toute application). Rotation de centre  $\Omega$  et angle  $\theta =$  identité (neutre). Inverse de  $R_{\Omega, \theta} : R_{\Omega, -\theta}$ . Loi de composition :  $R_{\Omega, \theta_2} \circ R_{\Omega, \theta_1} = R_{\Omega, \theta_1 + \theta_2}$ . Interne et commutative. **Groupe abélien.**

### Solution 5.

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$ . Morphisme. Injective :  $e^x = e^y \Rightarrow x = y$  (log). Surjective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^*$  : non —  $e^x > 0$ , donc image =  $\mathbb{R}_+^*$ , pas  $\mathbb{R}^*$ . Donc non surjectif vers  $\mathbb{R}^*$ , mais oui vers  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Solution 6.

$f(AB) = \det(AB) = \det A \times \det B = f(A) \times f(B)$ . Morphisme.

### Solution 7.

**Unicité du neutre** : supposons  $e, e'$  neutres.  $e * e' = e$  (car  $e'$  neutre) et  $e * e' = e'$  (car  $e$  neutre). Donc  $e = e'$ . **Unicité du symétrique** : supposons  $x', x''$  symétriques de  $x$ .  $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$ .

**Solution 8.**

$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$ . Par unicité du symétrique,  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

**Solution 9.**

**$n$  premier  $\Rightarrow$  corps** : tout  $a \neq 0 \pmod n$  vérifie  $\text{PGCD}(a, n) = 1$ , Bézout donne  $au + nv = 1$ , soit  $au \equiv 1 \pmod n$ . L'inverse existe.  **$n$  composé  $\Rightarrow$  pas corps** :  $n = ab$  avec  $1 < a, b < n$ . Alors  $ab \equiv 0 \pmod n$ , donc  $a$  divise zéro — n'est pas inversible (diviseur de zéro).